Mathématiques générales II (MATH0009)

Année académique 2021-2022

Corrigé de l'examen du 13 juin 2022
Biologistes et géographes bloc 2

Version 17 juin 2022

QUESTIONNAIRE

THEORIE

Question 1 : QCM

Pour chaque question, il n'y a qu'un seul item correct. Réponse correcte : 1 point ; pas de réponse : 0 point ; réponse incorrecte : -0.25 point.

1. L'inverse (pour la multiplication) d'un complexe z de module 1, non réel et non imaginaire pur
   ☐ peut ne pas exister ☐ est égal à l'opposé de z ☐ est égal au conjugué de z
   ☐ a la même partie imaginaire que z ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
2. Si z est un complexe, alors la partie imaginaire de $i + \bar{z}$ est toujours
   ☐ 1 ☐ i ☐ $1 + \Im(z)$ ☐ $1 - \Im(z)$ ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
3. Les valeurs propres de la conjuguée d'une matrice carrée sont toujours
   ☐ les mêmes que celles de la matrice de départ.
   ☐ les opposées de celles de la matrice de départ.
   ☐ les conjuguées de celles de la matrice de départ.
   ☐ les inverses de celles de la matrice de départ.
   ☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.
4. Si une matrice carrée non diagonale est inversible alors
   ☐ aucune de ses valeurs propres n'est nulle.
   ☐ son inverse est toujours diagonalisable.
   ☐ les éléments diagonaux de l'inverse sont toujours les inverses des éléments diagonaux de la matrice.
   ☐ les éléments des vecteurs propres de la matrice inverse sont les inverses des éléments des vecteurs propres de la matrice.
   ☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.
5. On considère la quadrique d'équation cartésienne $x^2/9 - y/16 + z^2 = -1$. La trace de cette quadrique dans le plan $y = -1$ est
   ☐ une ellipse.
   ☐ une hyperbole.
   ☐ une parabole dont la concavité est ≪ tournée vers le bas ≫.
   ☐ une parabole dont la concavité est ≪ tournée vers le haut ≫.
   ☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

Question 2 : VF

Réponse correcte : 1 point ; pas de réponse : 0 point ; réponse incorrecte : -0.5 point.

Version 1

1. La somme entre un complexe de module 1 et son inverse est toujours un nombre réel.
   ☐ Vrai ☐ Faux
2. Le produit de deux matrices diagonalisables est toujours diagonalisable.
   ☐ Vrai ☐ Faux

Version 2

1. La différence entre un complexe de module 1 et son inverse est toujours un nombre réel.
   ☐ Vrai ☐ Faux
2. Le produit de deux matrices diagonalisables par une même matrice est toujours diagonalisable.
   ☐ Vrai ☐ Faux

Question 3 : questions ouvertes

1. (a) Définir les notions de valeur propre et de vecteur propre d'une matrice carrée.
   (b) Définir ce que l'on entend par ≪ polynôme caractéristique d'une matrice carrée ≫.
   (c) Démontrer que si μ est une valeur propre de la matrice carrée A, alors μ annule le polynôme caractéristique de A.

2. (a) Que représente la notation $C_1(\Omega)$, où Ω est un ouvert du plan ?
(b) Soient f une fonction de deux variables réelles appartenant à $C_1(]0,+\infty[\times]-\infty,0[)$ et f_1, f_2 deux fonctions d'une variable réelle dérivables sur l'intervalle $]a,b[$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Dans quel ensemble la fonction composée $F = f(f_1, f_2)$ est-elle dérivable ? Et quelle est l'expression de sa dérivée en fonction des dérivées de f, f_1, f_2 ?

EXERCICES

1. (a) Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 3 en 0 de la fonction cosinus et en estimer le reste. Représenter la fonction et cette approximation dans le même repère orthonormé.
(b) Déterminer si l'intégrale suivante existe et si c'est le cas, en donner la valeur.

$$\int_0^{+\infty} xe^{-2x}\, dx$$

2. On considère une population de souris femelles dont on sait que chacune d'entre elles donne naissance (en moyenne) à une femelle pendant sa première année de vie et à huit femelles pendant sa deuxième année. Par ailleurs, la probabilité pour qu'une souris survive une deuxième année est de $0,25$ (25%) et il n'y a aucune chance pour qu'elle survive au-delà de la deuxième année. On distingue donc deux catégories de souris : les juvéniles, âgées de moins de un an et les adultes, dont l'âge est compris entre un et deux ans.
(a) Ecrire le système d'équations modélisant l'évolution de cette répartition des deux populations de souris en indiquant quelle est la matrice de Leslie de celle-ci.
(b) Quelles sont les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice de Leslie ?
3. On donne la fonction f explicitement par

$$f(x,y) = \ln(x^2 - y) - \ln(x).$$

(a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction.
(b) Dans un repère orthonormé, représenter ce domaine en le hachurant ou en le coloriant.
(c) Calculer l'expression suivante en tout point de ce domaine et la simplifier au maximum.

$$xD_x f(x,y) + 2yD_y f(x,y)$$

4. (a) Déterminer les valeurs des intégrales suivantes

$$I_1 = \iint_{[0,\pi/2]\times[0,\pi/2]} \cos(x+2y)\, dx\, dy \qquad I_2 = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{y^2}^{2} y\, e^{x^2}\, dx \right) dy.$$

(b) Représenter les ensembles d'intégration de I_1 et I_2 dans deux repères orthonormés différents en les hachurant ou en les coloriant.

CORRIGÉ

THEORIE

Question 1 : QCM

1. L'inverse (pour la multiplication) d'un complexe z de module 1, non réel et non imaginaire pur
☐ peut ne pas exister ☐ est égal à l'opposé de z ☐ ♣ est égal au conjugué de z
☐ a la même partie imaginaire que z ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
2. Si z est un complexe, alors la partie imaginaire de $i + \bar{z}$ est toujours
☐ 1 ☐ i ☐ $1 + \Im(z)$ ☐ ♣ $1 - \Im(z)$ ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
3. Les valeurs propres de la conjuguée d'une matrice carrée sont toujours
☐ les mêmes que celles de la matrice de départ.
☐ les opposées de celles de la matrice de départ.
☐ ♣ les conjuguées de celles de la matrice de départ.
☐ les inverses de celles de la matrice de départ.
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.
4. Si une matrice carrée non diagonale est inversible alors
☐ ♣ aucune de ses valeurs propres n'est nulle.
☐ son inverse est toujours diagonalisable.
☐ les éléments diagonaux de l'inverse sont toujours les inverses des éléments diagonaux de la matrice.
☐ les éléments des vecteurs propres de la matrice inverse sont les inverses des éléments des vecteurs propres de la matrice.
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.
5. On considère la quadrique d'équation cartésienne $x^2/9 - y/16 + z^2 = -1$. La trace de cette quadrique dans le plan $y = -1$ est
☐ une ellipse.
☐ une hyperbole.
☐ une parabole dont la concavité est « tournée vers le bas ».
☐ une parabole dont la concavité est « tournée vers le haut ».
☐ ♣ Aucune des autres propositions n'est correcte.

Question 2 : VF

Version 1

1. La somme entre un complexe de module 1 et son inverse est toujours un nombre réel.
☐ ♣ Vrai ☐ Faux
2. Le produit de deux matrices diagonalisables est toujours diagonalisable.
☐ Vrai ☐ ♣ Faux

Version 2

1. La différence entre un complexe de module 1 et son inverse est toujours un nombre réel.
☐ Vrai ☐ ♣ Faux
2. Le produit de deux matrices diagonalisables par une même matrice est toujours diagonalisable.
☐ ♣ Vrai ☐ Faux

Question 3 : questions ouvertes

1. **(a) Définir les notions de valeur propre et de vecteur propre d'une matrice carrée.**
(b) Définir ce que l'on entend par « polynôme caractéristique d'une matrice carrée ».
(c) Démontrer que si μ est une valeur propre de la matrice carrée A, alors μ annule le polynôme caractéristique de A.
2. **(a) Que représente la notation $C_1(\Omega)$, où Ω est un ouvert du plan ?**
(b) Soient f une fonction de deux variables réelles appartenant à $C_1(]0, +\infty[\times]-\infty, 0[)$ et f_1, f_2 deux fonctions d'une variable réelle dérivables sur l'intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Dans quel ensemble la fonction composée $F = f(f_1, f_2)$ est-elle dérivable ? Et quelle est l'expression de sa dérivée en fonction des dérivées de f, f_1, f_2 ?

Pour une réponse, voir les notes de cours et/ou le cours enseigné.

EXERCICES

1. (a) **Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 3 en 0 de la fonction cosinus et en estimer le reste. Représenter la fonction et cette approximation dans le même repère orthonormé.**

Solution. Cet exercice a été fait lors d'une répétition.
La fonction $f = \cos$ est indéfiniment continément dérivable sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc une approximation polynomiale en tout point à tous les ordres. Cela étant, les quatre premières dérivées de cette fonction sont données par

$$Df(x) = -\sin(x), \quad D^2 f(x) = -\cos(x), \quad D^3 f(x) = \sin(x), \quad D^4 f(x) = \cos(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

L'approximation à l'ordre 3 en 0 est donc le polynôme

$$P_3(x) \ = \ f(0) + xDf(0) + \frac{x^2}{2} D^2 f(0) + \frac{x^3}{3!} D^3 f(0) \ = \ 1 - \frac{x^2}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Le reste demandé est la fonction $R_3 : x \mapsto \cos(x) - P_3(x)$. Par ailleurs, le développement limité de Taylor affirme que pour tout réel x il existe un réel u compris entre 0 et x tel que

$$\cos(x) \ = \ P_3(x) + \frac{x^4}{4!} D^4 \cos(u);$$

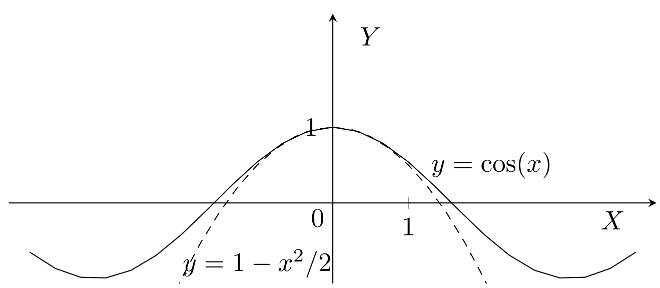
on a donc

$$R_3(x) \ = \ \frac{x^4}{4!} D^4 \cos(u) \ = \ \frac{x^4}{4!} \cos(u).$$

Puisque les valeurs de la fonction cosinus appartiennent à l'intervalle $[-1, 1]$, on obtient finalement

$$|R_3(x)| \ \leq \ \frac{x^4}{4!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Voici une représentation de la fonction cosinus (en traits pleins) et de son approximation à l'ordre 3 (en traits pointillés).



(b) **Déterminer si l'intégrale suivante existe et si c'est le cas, en donner la valeur.**

$$\int_0^{+\infty} xe^{-2x} \ dx$$

Solution. La fonction $x \mapsto xe^{-2x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs positives lorsque x est positif. Elle est donc intégrable sur $[0, +\infty[$ si la limite

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^t xe^{-2x} \ dx$$

est finie, auquel cas la valeur de la limite sera la valeur de l'intégrale recherchée.

Cela étant, quel que soit $t > 0$, une intégration par parties puis par variation de primitive donne directement

$$\begin{aligned}
\int_0^t xe^{-2x}\, dx &= -\frac{1}{2}\int_0^t xDe^{-2x}\, dx \\
&= -\frac{1}{2}\, te^{-2t} + \frac{1}{2}\int_0^t e^{-2x}\, dx \\
&= -\frac{1}{2}\, te^{-2t} - \frac{1}{4}\int_0^t De^{-2x}\, dx \\
&= -\frac{1}{2}\, te^{-2t} - \frac{1}{4}\left(e^{-2t} - 1\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, vu les propriétés de la fonction exponentielle, on obtient

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t xe^{-2x}\, dx = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\, te^{-2t} - \frac{1}{4}\left(e^{-2t}-1\right)\right) = \frac{1}{4}.$$

2. **On considère une population de souris femelles dont on sait que chacune d'entre elles donne naissance (en moyenne) à une femelle pendant sa première année de vie et à huit femelles pendant sa deuxième année. Par ailleurs, la probabilité pour qu'une souris survive une deuxième année est de $0,25$ (25%) et il n'y a aucune chance pour qu'elle survive au-delà de la deuxième année. On distingue donc deux catégories de souris : les juvéniles, âgées de moins de un an et les adultes, dont l'âge est compris entre un et deux ans.**
(a) Ecrire le système d'équations modélisant l'évolution de cette répartition des deux populations de souris en indiquant quelle est la matrice de Leslie de celle-ci.
(b) Quelles sont les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice de Leslie ?

Solution. Cet exercice se trouve dans le syllabus de théorie (pages 46-47, 67-68) et a été résolu au cours.

(a) Notons, pour tout instant t (supposé entier), j_t le nombre de souris juvéniles et a_t celui des adultes. Les hypothèses du modèle se traduisent par les deux équations

$$\left\{\begin{aligned} j_{t+1} &= j_t + 8a_t \\ a_{t+1} &= 0,25\, j_t; \end{aligned}\right.$$

sous format matriciel, on obtient

$$\begin{pmatrix} j_{t+1} \\ a_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_t \\ a_t \end{pmatrix}.$$

La matrice de Leslie dans ce cas est donc la matrice L définie par

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Cherchons maintenant les valeurs propres et les vecteurs propres de cette matrice L.
Le polynôme caractéristique de L est

$$\lambda \mapsto \det(L - \lambda\mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 8 \\ 1/4 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda-2)(\lambda+1).$$

Ses zéros sont les valeurs propres de L, à savoir les réels -1 et 2.
Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre 2. On doit trouver les vecteurs

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

non nuls tels que

$$(L - 2\mathbb{1})X = 0;$$

comme

$$(L - 2\mathbb{1})X = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1/4 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -x + 8y \\ x/4 - 2y \end{pmatrix},$$

on a

$$(L-2\mathbb{1})X=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=8y \quad \Leftrightarrow \quad X=y\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre 2 sont les vecteurs

$$X=c\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre -1. On doit trouver les vecteurs

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

non nuls tels que

$$(L-(-1)\mathbb{1})X=(L+\mathbb{1})X=0;$$

comme

$$(L+\mathbb{1})X=\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 2x+8y \\ x/4+y \end{pmatrix},$$

on a

$$(L+\mathbb{1})X=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-4y \quad \Leftrightarrow \quad X=y\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre -1 sont les vecteurs

$$X=c\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

3. **On donne la fonction f explicitement par**

$$f(x,y)=\ln(x^2-y)-\ln(x).$$

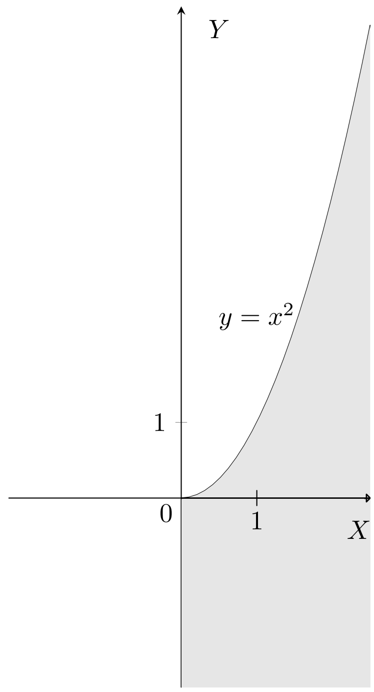
(a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction.
(b) Dans un repère orthonormé, représenter ce domaine en le hachurant ou en le coloriant.
(c) Calculer l'expression suivante en tout point de ce domaine et la simplifier au maximum.

$$xD_xf(x,y)+2yD_yf(x,y)$$

Solution. (a) Comme la fonction logarithme est indéfiniment continément dérivable sur $]0,+\infty[$, la fonction donnée l'est aussi sur

$$\Omega \;=\; \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; x>0 \text{ et } x^2>y\right\}.$$

(b) L'ensemble Ω est l'ensemble des points du plan dont l'abscisse est strictement positive et qui sont situés « sous » la parabole d'équation cartésienne $y=x^2$.Une représentation graphique de Ω est la suivante.



(c) Pour tout $(x, y) \in \Omega$, on a

$$D_x f(x, y) = \frac{2x}{x^2 - y} - \frac{1}{x}, \quad D_y f(x, y) = -\frac{1}{x^2 - y}$$

donc on obtient

$$x D_x f(x, y) + 2y D_y f(x, y) = \frac{2x^2}{x^2 - y} - 1 - \frac{2y}{x^2 - y} = 2\frac{x^2 - y}{x^2 - y} - 1 = 1.$$

4. **(a) Déterminer les valeurs des intégrales suivantes.**

$$I_1 = \iint_{[0,\pi/2]\times[0,\pi/2]} \cos(x + 2y)\, dx\, dy \qquad I_2 = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{y^2}^{2} y\, e^{x^2}\, dx \right) dy$$

(b) Représenter les ensembles d'intégration de I_1 et I_2 dans des repères orthonormés différents en les hachurant ou en les coloriant.

Solution. (a) La fonction $(x, y) \mapsto \cos(x + 2y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$; elle est donc intégrable sur tout ensemble fermé borné ; c'est le cas ici puisque l'ensemble d'intégration est le rectangle fermé borné $[0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$. On peut donc calculer l'intégrale dans n'importe quel ordre. En intégrant d'abord par rapport à y puis par rapport à x, on obtient

$$\begin{aligned} I_1 = \iint_{[0,\pi/2]\times[0,\pi/2]} \cos(x + 2y)\, dx\, dy &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2} \cos(x + 2y)\, dy \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2} D_y \sin(x + 2y)\, dy \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \Big(\sin(x + \pi) - \sin(x) \Big)\, dx \\ &= -\int_0^{\pi/2} \sin(x)\, dx \\ &= \int_0^{\pi/2} D \cos(x)\, dx \\ &= -1. \end{aligned}$$

La fonction $(x, y) \mapsto y\, e^{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$; elle est donc intégrable sur tout ensemble fermé borné. Ici l'ensemble d'intégration est l'ensemble fermé

$$\Big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ y \in [0, \sqrt{2}],\ y^2 \le x \le 2 \Big\},$$

lequel est inclus dans le rectangle borné $[0,2]\times[0,\sqrt{2}]$. Cet ensemble d'intégration étant fermé borné, la fonction y est intégrable et on peut calculer l'intégrale dans n'importe quel ordre.

Une intégration d'abord par rapport à x comme présenté dans l'énoncé n'est pas possible car il n'y a pas d'expression simple d'une primitive de la fonction $x \mapsto e^{x^2}$. Permutons alors l'ordre d'intégration. On a

$$I_2 = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{y^2}^2 y\, e^{x^2}\; dx \right)\; dy = \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{x}} y\, e^{x^2}\; dy \right)\; dx = \int_0^2 e^{x^2}\; \left(\int_0^{\sqrt{x}} y\, dy \right)\; dx.$$

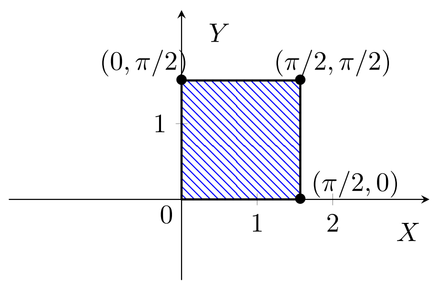
Cela étant, comme

$$\int_0^{\sqrt{x}} y\, dy \;=\; \frac{x}{2},$$

on obtient directement

$$I_2 \;=\; \frac{1}{2}\int_0^2 e^{x^2}\, x\, dx \;=\; \frac{1}{4}\int_0^2 De^{x^2}\; dx \;=\; \frac{e^4-1}{4}.$$

(b) L'ensemble d'intégration de I_1 est représenté ci-dessous



et celui de I_2 ci-dessous.