Mathématiques générales II (MATH0009)

Année académique 2021-2022

Corrigé de l'examen du 23 août 2022
Biologistes et géographes bloc 2

Version 3 juillet 2022

QUESTIONNAIRE

THEORIE

Question 1 : QCM

Pour chaque question, il n'y a qu'un seul item correct. Réponse correcte : 1 point ; pas de réponse : 0 point ; réponse incorrecte : -0.25 point.

Version 1

1. Le conjugué de l'opposé d'un complexe z non réel et non imaginaire pur a toujours
   ☐ la même partie réelle que z.
   ☐ la même partie imaginaire que z.
   ☐ une partie réelle positive.
   ☐ une partie imaginaire positive.
   ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
2. Si z est un complexe, alors la partie imaginaire du complexe w défini par $w = \bar{z} - iz$ est toujours égale à ☐ $-z$ ☐ $-iz$ ☐ l'opposé de la partie réelle de w ☐ la partie réelle de w ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
3. Les valeurs propres de la transposée d'une matrice carrée sont toujours
   ☐ les mêmes que celles de la matrice de départ.
   ☐ les opposées de celles de la matrice de départ.
   ☐ les conjuguées de celles de la matrice de départ.
   ☐ les inverses de celles de la matrice de départ.
   ☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.
4. Si A et B sont deux matrices carrées de même dimension et inversibles alors
   ☐ leur somme est toujours inversible.
   ☐ l'inverse de leur produit AB est $A^{-1}B^{-1}$.
   ☐ l'inverse de leur produit AB est $B^{-1}A^{-1}$.
   ☐ leur produit n'est pas toujours inversible.
   ☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.
5. On considère la quadrique d'équation cartésienne $x^2 - y/16 + z^2/9 = 1$. La trace de cette quadrique dans le plan $y = -1$ est
   ☐ une ellipse dont les foyers sont sur l'axe X.
   ☐ une ellipse dont les foyers sont sur l'axe Z.
   ☐ une parabole.
   ☐ une hyperbole.
   ☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

Version 2

1. La partie réelle de l'inverse d'un complexe z non réel et non imaginaire pur est toujours
   ☐ de même signe que celui de la partie réelle de z.
   ☐ de même signe que celui de la partie imaginaire de z.
   ☐ de signe opposé à celui de la partie réelle de z.
   ☐ de signe opposé à celui de la partie imaginaire de z.
   ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
2. Si z est un complexe, alors la partie imaginaire du complexe w défini par $w = z - i\bar{z}$ est toujours égale à ☐ $-\bar{z}$ ☐ $-i\bar{z}$ ☐ l'opposé de la partie réelle de w ☐ la partie réelle de w ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
3. Les valeurs propres de l'adjointe d'une matrice carrée sont toujours
   ☐ les mêmes que celles de la matrice de départ.
   ☐ les opposées de celles de la matrice de départ.
   ☐ les conjuguées de celles de la matrice de départ.
   ☐ les inverses de celles de la matrice de départ.
   ☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

4. Si A et B sont deux matrices carrées de même dimension et inversibles alors
   ☐ leur somme est toujours inversible.
   ☐ leur produit n'est pas toujours inversible.
   ☐ l'inverse de leur produit AB est $B^{-1}A^{-1}$.
   ☐ l'inverse de leur produit AB est $A^{-1}B^{-1}$.
   ☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.
5. On considère la quadrique d'équation cartésienne $-x^2 + y/16 - z^2/9 = -1$. La trace de cette quadrique dans le plan $y = -17$ est
   ☐ une ellipse dont les foyers sont sur l'axe X.
   ☐ une ellipse dont les foyers sont sur l'axe Z.
   ☐ une parabole.
   ☐ une hyperbole.
   ☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

Question 2 : VF

Réponse correcte : 1 point ; pas de réponse : 0 point ; réponse incorrecte : -0.5 point.

Version 1

1. Le produit d'un complexe et de son conjugué est toujours un nombre imaginaire pur.
   ☐ Vrai ☐ Faux
2. Les valeurs propres d'une matrice réelle sont toujours des nombres réels.
   ☐ Vrai ☐ Faux

Version 2

1. La différence entre un nombre complexe non réel et son conjugué est toujours un nombre imaginaire pur. ☐ Vrai ☐ Faux
2. Les valeurs propres d'une matrice réelle sont toujours des nombres réels. ☐ Vrai ☐ Faux

Question 3 : questions ouvertes

1. (a) Définir les notions de valeur propre et de vecteur propre d'une matrice carrée.
   (b) Définir ce que l'on entend par « polynôme caractéristique d'une matrice carrée ».
   (c) Démontrer que si μ est une valeur propre de la matrice carrée A, alors μ annule le polynôme caractéristique de A.
2. (a) Que représente la notation $C_1(\Omega)$ (Ω est un ouvert du plan) ?
   (b) Soient f une fonction de deux variables réelles appartenant à $C_1(]0, +\infty[\times] - 1, 1[)$ et f_1, f_2 deux fonctions d'une variable réelle dérivables sur l'intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Dans quel ensemble la fonction composée $F = f(f_1, f_2)$ est-elle dérivable ? Et quelle est l'expression de sa dérivée en fonction des dérivées de f, f_1, f_2 ?

EXERCICES

1. (a) (a1) Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 1 et à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \mapsto xe^x$.
   (a2) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.
   (a3) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0 dans le même repère.
   (b) Déterminer si l'intégrale suivante existe et si c'est le cas, en donner la valeur.
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx$$
2. On considère une population de lapines d'une race fragile dont on sait que chacune d'entre elles donne naissance (en moyenne) à deux lapines pendant sa première année de vie et à douze lapines pendant sa deuxième année. Par ailleurs, la probabilité pour qu'une lapine survive une deuxième année est de $0,25$ (25%) et il n'y a aucune chance pour qu'elle survive au-delà de la deuxième année. On distingue donc deux catégories de lapines : les lapines juvéniles, âgées de moins de un an et les lapines adultes, dont l'âge est compris entre un et deux ans.
   (a) Ecrire le système d'équations modélisant l'évolution de cette répartition des deux populations de lapines en indiquant quelle est la matrice de Leslie de celle-ci.
   (b) Quelles sont les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice de Leslie ?

3. On donne la fonction f explicitement par

$$f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2}) - \arctan\left(\frac{x}{y}\right).$$

   (a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction.

   (b) Calculer l'expression suivante en tout point de ce domaine et la simplifier au maximum.

$$D_x f(x,y) + D_y f(x,y)$$

4. (a) Déterminer les valeurs des intégrales suivantes.

$$I_1 = \iint_{[0,\pi/3]\times[0,\pi]} \sin(2x+y)\, dx\, dy \qquad I_2 = \int_0^2 \left(\int_x^2 e^{-y^2}\, dy\right)\, dx$$

   (b) Représenter les ensembles d'intégration de I_1 et I_2 dans deux repères orthonormés différents en les hachurant ou en les coloriant.

CORRIGÉ

THEORIE

Question 1 : QCM

Version 1

1. Le conjugué de l'opposé d'un complexe z non réel et non imaginaire pur a toujours
   ☐ la même partie réelle que z.
   ♣ la même partie imaginaire que z.
   ☐ une partie réelle positive.
   ☐ une partie imaginaire positive.
   ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
2. Si z est un complexe, alors la partie imaginaire du complexe w défini par $w = \bar{z} - iz$ est toujours égale à ☐ $-z$ ☐ $-iz$ ♣ l'opposé de la partie réelle de w ☐ la partie réelle de w ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
3. Les valeurs propres de la transposée d'une matrice carrée sont toujours
   ♣ les mêmes que celles de la matrice de départ.
   ☐ les opposées de celles de la matrice de départ.
   ☐ les conjuguées de celles de la matrice de départ.
   ☐ les inverses de celles de la matrice de départ.
   ☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.
4. Si A et B sont deux matrices carrées de même dimension et inversibles alors
   ☐ leur somme est toujours inversible.
   ☐ l'inverse de leur produit AB est $A^{-1}B^{-1}$.
   ♣ l'inverse de leur produit AB est $B^{-1}A^{-1}$.
   ☐ leur produit n'est pas toujours inversible.
   ☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.
5. On considère la quadrique d'équation cartésienne $x^2 - y/16 + z^2/9 = 1$. La trace de cette quadrique dans le plan $y = -1$ est
   ☐ une ellipse dont les foyers sont sur l'axe X.
   ♣ une ellipse dont les foyers sont sur l'axe Z.
   ☐ une parabole.
   ☐ une hyperbole.
   ☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

Version 2

1. La partie réelle de l'inverse d'un complexe z non réel et non imaginaire pur est toujours
   ♣ de même signe que celui de la partie réelle de z.
   ☐ de même signe que celui de la partie imaginaire de z.
   ☐ de signe opposé à celui de la partie réelle de z.
   ☐ de signe opposé à celui de la partie imaginaire de z.
   ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
2. Si z est un complexe, alors la partie imaginaire du complexe w défini par $w = z - i\bar{z}$ est toujours égale à ☐ $-\bar{z}$ ☐ $-i\bar{z}$ ♣ l'opposé de la partie réelle de w ☐ la partie réelle de w ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
3. Les valeurs propres de l'adjointe d'une matrice carrée sont toujours
   ☐ les mêmes que celles de la matrice de départ.
   ☐ les opposées de celles de la matrice de départ.
   ♣ les conjuguées de celles de la matrice de départ.
   ☐ les inverses de celles de la matrice de départ.
   ☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.
4. Si A et B sont deux matrices carrées de même dimension et inversibles alors
   ☐ leur somme est toujours inversible.
   ☐ leur produit n'est pas toujours inversible.

♣ l'inverse de leur produit AB est $B^{-1}A^{-1}$.
☐ l'inverse de leur produit AB est $A^{-1}B^{-1}$.
☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

5. On considère la quadrique d'équation cartésienne $-x^2 + y/16 - z^2/9 = -1$. La trace de cette quadrique dans le plan $y = -17$ est
☐ une ellipse dont les foyers sont sur l'axe X.
☐ une ellipse dont les foyers sont sur l'axe Z.
☐ une parabole.
☐ une hyperbole.
♣ Aucune des autres propositions n'est correcte.

Question 2 : VF

Version 1

1. Le produit d'un complexe et de son conjugué est toujours un nombre imaginaire pur.
☐ Vrai ♣ Faux
2. Les valeurs propres d'une matrice réelle sont toujours des nombres réels.
☐ Vrai ♣ Faux

Version 2

1. La différence entre un nombre complexe non réel et son conjugué est toujours un nombre imaginaire pur. ♣ Vrai ☐ Faux
2. Les valeurs propres d'une matrice réelle sont toujours des nombres réels. ☐ Vrai ♣ Faux

Question 3 : questions ouvertes

1. **(a) Définir les notions de valeur propre et de vecteur propre d'une matrice carrée.**
(b) Définir ce que l'on entend par ≪ polynôme caractéristique d'une matrice carrée ≫.
(c) Démontrer que si μ est une valeur propre de la matrice carrée A, alors μ annule le polynôme caractéristique de A.
2. **(a) Que représente la notation $C_1(\Omega)$ (Ω est un ouvert du plan) ?**
(b) Soient f une fonction de deux variables réelles appartenant à $C_1(]0,+\infty[\times]-1,1[)$ et f_1, f_2 deux fonctions d'une variable réelle dérivables sur l'intervalle $]a,b[$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Dans quel ensemble la fonction composée $F = f(f_1, f_2)$ est-elle dérivable ? Et quelle est l'expression de sa dérivée en fonction des dérivées de f, f_1, f_2 ?

Pour une réponse, voir les notes de cours et/ou le cours enseigné.

EXERCICES

1. **(a) (a1) Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 1 et à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \mapsto xe^x$.**

Solution. La fonction est indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$. En dérivant, on a successivement

$$\begin{array}{rcl} Df(x) & = & e^x + x\,e^x = (x+1)\,e^x \ , \\ D^2f(x) & = & e^x + (x+1)\,e^x = (x+2)\,e^x \ , \\ D^3f(x) & = & e^x + (x+2)\,e^x = (x+3)\,e^x . \end{array}$$

Comme $f(0) = 0$, $Df(0) = 1$ et $D^2f(0) = 2$, en notant P_n l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on a

$$\begin{array}{rcl} P_1(x) & = & f(0) + Df(0)\,x \ = \ x, \\ P_2(x) & = & f(0) + Df(0)\,x + D^2f(0)\,\dfrac{x^2}{2} \ = \ x + x^2, \ x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

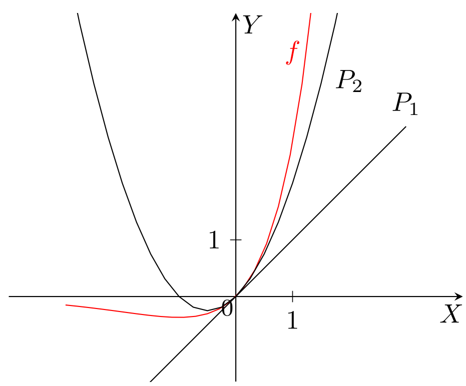
(a2) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.

Solution. Notons R_n le reste de l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0. Vu le développement limité de Taylor, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe u_1 et u_2 compris entre 0 et x tels que

$$R_1(x) = (u_1+2)\,e^{u_1}\,\frac{x^2}{2}, \quad R_2(x) = (u_2+3)\,e^{u_2}\,\frac{x^3}{3!} = (u_2+3)\,e^{u_2}\,\frac{x^3}{6}, \ x \in \mathbb{R}.$$

(a3) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0 dans le même repère.

Solution. Le graphique de P_1 est la droite d'équation $x = y$; celui de P_2 est la parabole d'équation $y = x^2 + x$, laquelle intersecte l'axe X en les points d'abscisse -1 et 0, dont l'axe a pour équation $x = -1/2$ et dont le sommet a pour coordonnées $(-1/2, -1/4)$. Par ailleurs, l'expression de f permet de dire que $f(x)$ a le signe de x et l'expression de ses dérivées permet de dire que f est croissant et convexe au voisinage de 0.
Voici la représentation graphique de P_1, P_2 et f au voisinage de 0.



(b) Déterminer si l'intégrale suivante existe et si c'est le cas, en donner la valeur.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

Solution. La fonction $x \mapsto 1/(x^2+1)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs positives. Elle est donc intégrable sur $[1, +\infty[$ si la limite

$$\lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

est finie, auquel cas la valeur de la limite sera la valeur de l'intégrale recherchée.
Cela étant, quel que soit $t > 1$, on a directement

$$\int_1^t \frac{1}{x^2+1}\,dx = \Big[\arctan(x)\Big]_1^t = \arctan(t) - \arctan(1) = \arctan(t) - \frac{\pi}{4}.$$

Ainsi, comme la limite $\lim_{t\to+\infty} \arctan(t) = \pi/2$, on obtient

$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2+1}\, dx \;=\; \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \;=\; \frac{\pi}{4}.$$

2. **On considère une population de lapines d'une race fragile dont on sait que chacune d'entre elles donne naissance (en moyenne) à deux lapines pendant sa première année de vie et à douze lapines pendant sa deuxième année. Par ailleurs, la probabilité pour qu'une lapine survive une deuxième année est de $0,25$ (25%) et il n'y a aucune chance pour qu'elle survive au-delà de la deuxième année. On distingue donc deux catégories de lapines : les lapines juvéniles, âgées de moins de un an et les lapines adultes, dont l'âge est compris entre un et deux ans.**
(a) Ecrire le système d'équations modélisant l'évolution de cette répartition des deux populations de lapines en indiquant quelle est la matrice de Leslie de celle-ci.
(b) Quelles sont les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice de Leslie ?

Solution.
(a) Notons, pour tout instant t (supposé entier), j_t le nombre de lapines juvéniles et a_t celui des adultes. Les hypothèses du modèle se traduisent par les deux équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} j_{t+1} & = & 2\, j_t + 12\, a_t \\ a_{t+1} & = & 0,25\, j_t; \end{array} \right.$$

sous format matriciel, on obtient

$$\left(\begin{array}{c} j_{t+1} \\ a_{t+1} \end{array} \right) \;=\; \left(\begin{array}{cc} 2 & 12 \\ 1/4 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} j_t \\ a_t \end{array} \right).$$

La matrice de Leslie dans ce cas est donc la matrice L définie par

$$L \;=\; \left(\begin{array}{cc} 2 & 12 \\ 1/4 & 0 \end{array} \right).$$

(b) Cherchons maintenant les valeurs propres et les vecteurs propres de cette matrice L.
Le polynôme caractéristique de L est

$$\lambda \mapsto \det(L - \lambda\mathbb{1}) = \left| \begin{array}{cc} 2-\lambda & 12 \\ 1/4 & -\lambda \end{array} \right| = (2-\lambda)(-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)\,(\lambda + 1).$$

Ses zéros sont les valeurs propres de L, à savoir les réels -1 et 3.
Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre 3. On doit trouver les vecteurs

$$X = \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right)$$

non nuls tels que $(L - 3\mathbb{1})X = 0$; comme

$$(L - 3\mathbb{1})X = \left(\begin{array}{cc} -1 & 12 \\ 1/4 & -3 \end{array} \right) X = \left(\begin{array}{c} -x + 12y \\ x/4 - 3y \end{array} \right),$$

on a

$$(L - 3\mathbb{1})X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 12y \quad \Leftrightarrow \quad X = y \left(\begin{array}{c} 12 \\ 1 \end{array} \right).$$

Il s'ensuit que l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre 3 sont les vecteurs

$$X = c \left(\begin{array}{c} 12 \\ 1 \end{array} \right), \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre -1. On doit trouver les vecteurs

$$X = \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right)$$

non nuls tels que $(L-(-1)\mathbb{1})X=(L+\mathbb{1})X=0$; comme

$$(L+\mathbb{1})X=\begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix} X=\begin{pmatrix} 3x+12y \\ x/4+y \end{pmatrix},$$

on a

$$(L+\mathbb{1})X=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-4y \quad \Leftrightarrow \quad X=y\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre -1 sont les vecteurs

$$X=c\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c\in\mathbb{C}_0.$$

3. **On donne la fonction f explicitement par**

$$f(x,y)=\ln(\sqrt{x^2+y^2})-\arctan\left(\frac{x}{y}\right).$$

(a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction.
(b) Calculer l'expression suivante en tout point de ce domaine et la simplifier au maximum.

$$D_xf(x,y)+D_yf(x,y)$$

Solution. (a) Le domaine d'infinie dérivabilité de f est l'ensemble

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2>0,\, y\neq 0\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x,y)\neq(0,0),\, y\neq 0\}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}_0.$$

(b) En tout point de A, la fonction f peut s'écrire sous la forme

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$$

et dès lors on a

$$\begin{aligned} D_xf(x,y) &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{x^2+y^2}\times 2x-\frac{1}{1+x^2/y^2}\times\frac{1}{y}=\frac{x-y}{x^2+y^2} \\ D_yf(x,y) &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{x^2+y^2}\times 2y-\frac{1}{1+x^2/y^2}\times\left(\frac{-x}{y^2}\right)=\frac{y+x}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$D_xf(x,y)+D_yf(x,y)=\frac{2x}{x^2+y^2}.$$

4. **(a) Déterminer les valeurs des intégrales suivantes.**

$$I_1=\iint_{[0,\pi/3]\times[0,\pi]}\sin(2x+y)\,dx\,dy \qquad I_2=\int_0^2\left(\int_x^2 e^{-y^2}\,dy\right)\,dx$$

(b) Représenter les ensembles d'intégration de I_1 et I_2 dans deux repères orthonormés différents en les hachurant ou en les coloriant.

Solution. (a) La fonction $(x,y)\mapsto\sin(2x+y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$; elle est donc intégrable sur tout ensemble fermé borné ; c'est le cas ici puisque l'ensemble d'intégration est le rectangle fermé borné $[0,\pi/3]\times[0,\pi]$. On peut donc calculer l'intégrale dans n'importe quel ordre. En intégrant d'abord par rapport à y puis par rapport à x, on obtient

$$\begin{aligned}
I_1 = \iint_{[0,\pi/3]\times[0,\pi]} \sin(2x+y)\,dx\,dy &= \int_0^{\pi/3}\left(\int_0^{\pi}\sin(2x+y)\,dy\right)\,dx\\
&= -\int_0^{\pi/3}\left(\int_0^{\pi} D_y\cos(2x+y)\,dy\right)\,dx\\
&= -\int_0^{\pi/3}\Big(\cos(2x+\pi)-\cos(2x)\Big)\,dx\\
&= 2\int_0^{\pi/3}\cos(2x)\,dx\\
&= \int_0^{\pi/3} D\sin(2x)\,dx\\
&= \sin(2\pi/3)-\sin(0)\\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

La fonction $(x,y)\mapsto e^{-y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$; elle est donc intégrable sur tout ensemble fermé borné. Ici l'ensemble d'intégration est l'ensemble fermé $A=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x\in[0,2], y\in[x,2]\big\}$, lequel est inclus dans le rectangle borné $[0,2]\times[0,2]$. Cet ensemble d'intégration étant fermé borné, la fonction y est intégrable et on peut calculer l'intégrale dans n'importe quel ordre.

Une intégration d'abord par rapport à y comme présenté dans l'énoncé n'est pas possible car il n'y a pas d'expression simple d'une primitive de la fonction $y\mapsto e^{-y^2}$. Permutons alors l'ordre d'intégration. L'ensemble d'intégration s'écrit

$$A \;=\; \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 2\ \&\ x\le y\le 2\big\} \;=\; \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le 2\ \&\ 0\le x\le y\big\}.$$

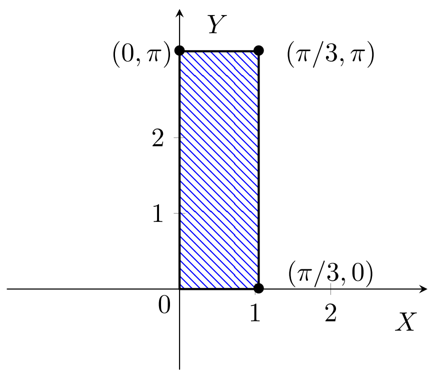
On a donc

$$I_2=\int_0^2\left(\int_x^2 e^{-y^2}\,dy\right)\,dx=\int_0^2\left(\int_0^y e^{-y^2}\,dx\right)\,dy=\int_0^2 e^{-y^2}\left(\int_0^y 1\,dx\right)\,dy=\int_0^2 y\,e^{-y^2}\,dy.$$

Cela étant, comme $D\,e^{-y^2}=-2y\,e^{-y^2}$, on obtient directement

$$I_2 \;=\; \left[-\frac{1}{2}\,e^{-y^2}\right]_0^2 \;=\; \frac{1}{2}\,(1-e^{-4}) \;=\; \frac{e^4-1}{2e^4}.$$

(b) L'ensemble d'intégration de I_1 est représenté ci-dessous



et celui de I_2 ci-dessous.