MATH0009 *Biologie et Géographie*

Année académique 2021-2022

Exercices de mathématiques
Mathématiques générales II

Révisions en vue de l'interrogation du 22 avril et
de l'examen de juin 2022 : correction

Version 21 mars 2022

Correction des exercices de révision

1. **On se place dans un repère orthonormé. Représenter le graphique des coniques suivantes, données par leur équation cartésienne. Comment s'appellent ces coniques ? Quelles sont les coordonnées de leur(s) foyer(s) ? Quelle est leur excentricité ? Quelle est l'équation des éventuelles asymptotes ?**

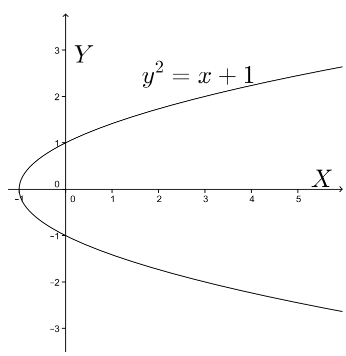
   (a) $y^2 = x + 1$ (b) $x^2 - 1 = 4y^2$ (c) $x^2 + 3y^2 = 12$

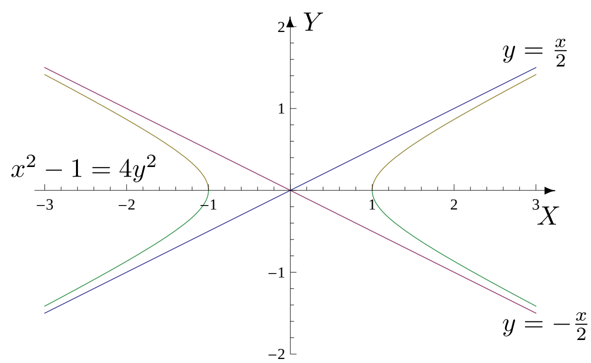
   Solution. L'équation $y^2 = x+1$ est celle d'une parabole dont le foyer a pour coordonnées $(-\frac{3}{4}, 0)$ et pour excentricité 1.

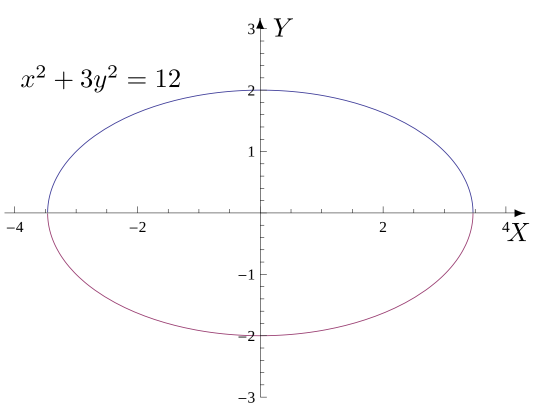
   L'équation $x^2 - 1 = 4y^2$ est celle d'une hyperbole dont les foyers ont pour coordonnées $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ et $\left(\frac{-\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ et pour excentricité $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Les asymptotes sont les droites d'équation $x + 2y = 0$ et $x - 2y = 0$.

   L'équation $x^2 + 3y^2 = 12$ est celle d'une ellipse dont les foyers ont pour coordonnées $(2\sqrt{2}, 0)$ et $(-2\sqrt{2}, 0)$ et pour excentricité $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

   Voici la représentation graphique de ces coniques







2. **Soient les matrices A et B données par**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i^3 \\ 0 & i & 0 \\ \frac{1}{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B^* = \begin{pmatrix} 2i & i & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si possible, effectuer les opérations suivantes et simplifier la réponse au maximum :

1) $A + \widetilde{B}$ **2)** $C = AB$ **3)** C^{-1}

Solution. Les matrices étant carrées et de même dimension, on peut calculer $A + \widetilde{B}$ et $C = AB$. On a

$$A + \widetilde{B} = \begin{pmatrix} -2i & -i & i \\ 0 & 2i & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $\det(C) = -2i \neq 0$, la matrice C^{-1} existe et on a

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. **La matrice** $M = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **est-elle diagonalisable ? Pourquoi ?**

Si oui, en déterminer une forme diagonale Δ ainsi qu'une matrice inversible S qui y conduit.

Solution. La matrice M possède 3 valeurs propres simples ($-i$, i et 1) ; M est donc diagonalisable. On a, par exemple, $\Delta = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. **Pour inciter les jeunes à faire du sport, une association oblige ses affiliés à pratiquer, chaque semaine, un sport sur les trois qu'elle propose (jogging, natation, basket). D'une semaine à l'autre, les étudiants peuvent changer de choix.**
- Ayant choisi le jogging, un étudiant a une chance sur deux d'aller à la piscine et une chance sur deux de pratiquer le basket la semaine suivante.
- S'il a nagé une semaine, la semaine suivante, il a une chance sur trois de poursuivre la même activité, une chance sur trois de faire du jogging et une chance sur trois de pratiquer le basket.
- Enfin, s'il a joué au basket, il a une chance sur quatre de nager et trois chances sur quatre de faire du jogging.
(i) Déterminer la matrice de transition.

Solution. Soient B_0, J_0 et N_0 respectivement le type de sport (basket, jogging, natation) choisi pour une semaine fixée au départ et B_1, J_1 et N_1 respectivement le type de sport choisi la semaine suivante. On a donc

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ J_1 \\ N_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 \\ 3/4 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ J_0 \\ N_0 \end{pmatrix}$$

et la matrice de tansition T est

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 \\ 3/4 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

(ii) **Sachant que cette matrice est régulière, calculer la probabilité qu'à long terme un étudiant fasse du jogging.**

Solution. Puisque T est une matrice régulière, la situation à long terme est donnée par le vecteur propre de probabilité de valeur propre 1.
Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont des vecteurs du type

$$c\begin{pmatrix} 12 \\ 14 \\ 15 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

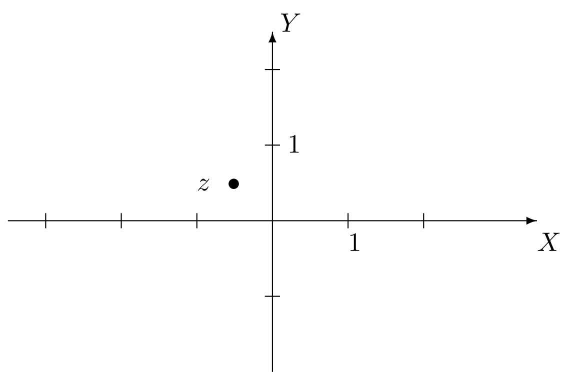
Comme $c(12+14+15)=1 \Leftrightarrow c=\frac{1}{41}$, le vecteur de probabilité est donc

$$\begin{pmatrix} \frac{12}{41} \\ \frac{14}{41} \\ \frac{15}{41} \end{pmatrix}$$

et la probabilité qu'un étudiant fasse du jogging à long terme est de 14/41.

5. **Déterminer les partie réelle, imaginaire, le conjugué et le module du complexe** $z = i^7/(i-1)$**. Le représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé (≪ X = axe réel ≫ et ≪ Y= axe imaginaire ≫).**
Solution. Comme $z=(-1+i)/2$, on a $\Re z=-1/2$, $\Im z=1/2$, $\overline{z}=(-1-i)/2$ et $|z|=\sqrt{2}/2$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on a



6. **Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:** (a) $x^2+3=2ix$ (b) $8-x^3=0$

Solution. Les ensembles S de solutions sont les suivants :
(a) $S=\{-i,\ 3i\}$ (b) $S=\{2,\ -1-i\sqrt{3},\ -1+i\sqrt{3}\}$

7. **Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes (f est la fonction inconnue)**

$$a)\ D^2f(x)+f(x)=e^{ix} \qquad b)\ 9D^2f(x)+6Df(x)+f(x)=\sin\left(\frac{x}{3}\right)$$

Solution. a) Les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$c_2e^{-ix}+\left(c_1-\frac{i}{2}x\right)e^{ix},\ x\in\mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.
b) Les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$(c_1x+c_2)e^{-\frac{x}{3}}-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{3}\right),\ x\in\mathbb{R}$$

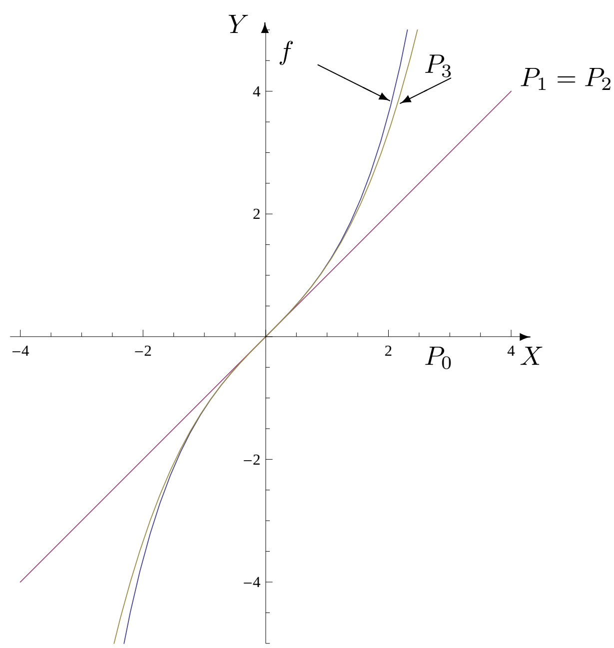
où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

8. **(a) Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre $n = 0, 1, 2$ et 3 en $x_0 = 0$ de la fonction**
$$f : x \mapsto f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$
(b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.
(c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0 en tenant compte du point précédent.

Solution. (a) Si on note $P_n(x)$ l'approximation à l'ordre n en 0, puisque f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, on a
$$P_0(x) = 0, \quad P_1(x) = P_2(x) = x \quad \text{ et } P_3(x) = x + \frac{x^3}{6},\ x \in \mathbb{R}.$$

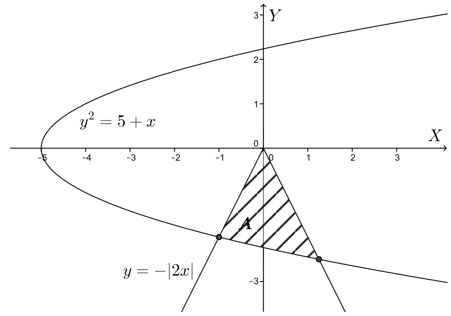
(b) Si on note $R_n(x)$ le reste de l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0 alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe u_0, u_1, u_2 et u_3 compris entre 0 et x tels que
$$R_0(x) = \frac{e^{u_0} + e^{-u_0}}{2}\ x,\ R_1(x) = \frac{e^{u_1} - e^{-u_1}}{4}\ x^2,\ R_2(x) = \frac{e^{u_2} + e^{-u_2}}{12}\ x^3,\ R_3(x) = \frac{e^{u_3} - e^{-u_3}}{48}\ x^4.$$
Comme $e^x + e^{-x} > 0\ \forall x$, $e^x - e^{-x} < 0$ si $x < 0$ et $e^x - e^{-x} > 0$ si $x > 0$, les restes ont tous le même signe que x au voisinage de 0.

(c) Vu le signe des restes au voisinage de 0, le graphique de f se trouve en dessous des approximations si $x < 0$ et au-dessus si $x > 0$. Voici la représentation graphique de f et des approximations demandées :



9. **Calculer l'aire de la partie du plan dont une description analytique est la suivante**
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -|2x| \geq y \text{ et } y^2 \leq 5 + x\}.$$
Donner aussi une représentation graphique de l'ensemble.

Solution. Voici une représentation graphique de l'ensemble :



Les abscisses des points d'intersection des courbes sont -1 et $\frac{5}{4}$.
Les fonction $x \mapsto 2x - (-\sqrt{5+x})$ et $x \mapsto -2x - (-\sqrt{5+x})$ sont continues sur $[-5, +\infty[$ donc respectivement sur $[-1, 0]$ et sur $[0, 5/4]$, fermés bornés. Ells y sont donc intégrables. Dès lors, l'aire recherchée est donnée par

$$A = \int_{-1}^{0} (2x + \sqrt{5+x})\ dx + \int_{0}^{5/4} (-2x + \sqrt{5+x})\ dx = \frac{121}{48}.$$

10. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier la réponse au maximum.**

$(a)\ \int_{-2}^{-1} \frac{\ln(-3x)}{x} dx \qquad (b)\ \int_{-\infty}^{0} xe^{3x} dx$

$(c)\ \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{2-x} dx \qquad (d)\ \int_{-4}^{4} \sqrt{x^2} dx$

$(e)\ \int_{4}^{5} \frac{2}{x(x^2-6x+9)} dx$

Solution. Toutes les fonctions sont intégrables sur l'intervalle considéré sauf la fonction $x \mapsto 1/(2-x)$ qui n'est pas intégrable en $-\infty$. Les intégrales valent respectivement

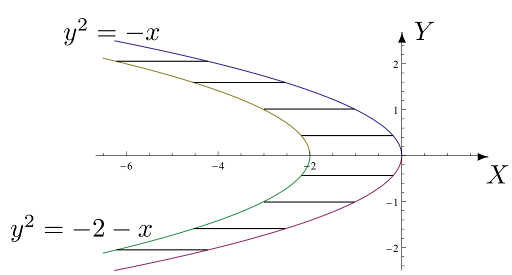
(a) $-\frac{1}{2}\ln(2)\ .\ \ln(18)$ (b) $-\frac{1}{9}$ (d) 16 (e) $\frac{2}{9}(\ln(5) - 3\ln(2)) + \frac{1}{3}$

11. **On donne la fonction f par**

$$f : (x, y) \mapsto f(x, y) = \arcsin(y^2 + x + 1)$$

(a) **Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction et le représenter dans un repère orthonormé.**

Solution. La fonction f est infiniment dérivable sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < y^2 + x + 1 < 1\}$. Les points de l'ensemble sont représentés par la partie hachurée du plan, les points des paraboles étant exclus.



(b) **Calculer la dérivée de f par rapport à sa deuxième variable.**

Solution. La dérivée de f par rapport à sa deuxième variable est donnée par

$$(D_y f)(x,y) = \frac{2y}{\sqrt{1-(y^2+x+1)^2}}.$$

(c) **Déterminer le domaine de dérivabilité ainsi que la forme explicite de**

$$F : t \mapsto F(t) = f(5t^2-1, 2t)$$

et de sa dérivée en tout point de ce domaine.

Solution. Le domaine de dérivabilité de F est l'ensemble $\left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[$, la forme explicite de cette fonction est $t \mapsto F(t) = \arcsin(9t^2)$ et sa dérivée est donnée par $DF(t) = \dfrac{18t}{\sqrt{1-81t^4}}$.

(d) **Si F est dérivable en $1/6$, que vaut sa dérivée en ce point ? Simplifier votre réponse au maximum.**

La dérivée de F en $1/6$ vaut $\dfrac{4\sqrt{15}}{5}$.

12. **On donne la fonction f continûment dérivable sur $]1,2[\times]0,1[$ et à valeurs strictement positives.**

(a) **Déterminer le domaine de dérivabilité de $g : x \mapsto \ln(f(\sqrt{x}, \ln(3-x)))$.**

Solution. La fonction g est dérivable sur $]1,2[$.

(b) **Calculer la dérivée de g en fonction de f et de ses dérivées partielles.**

Solution. La dérivée de g est donnée par

$$Dg(x) = \frac{1}{f(\sqrt{x}, \ln(3-x))}\left[(D_u f)(\sqrt{x}, \ln(3-x)).\frac{1}{2\sqrt{x}} + (D_v f)(\sqrt{x}, \ln(3-x)).\left(\frac{-1}{3-x}\right)\right]$$

si u et v sont respectivement la première et la deuxième variable de f.

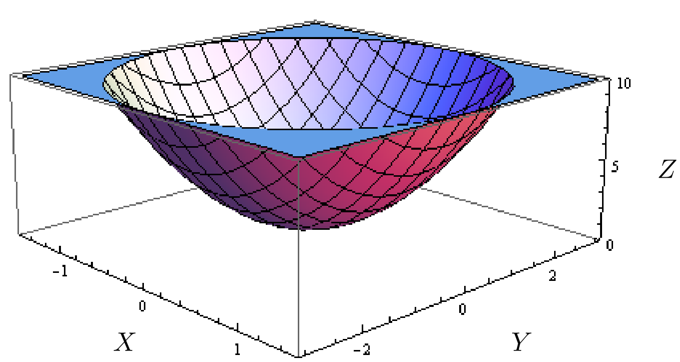
(c) **Si g est dérivable en $5/2$, que vaut sa dérivée en ce point ?**

Solution. La fonction g n'est pas dérivable en $5/2$ car $5/2 \notin]1,2[$.

13. **(a) Esquisser la représentation graphique de la surface quadrique d'équation**

$$4x^2 + y^2 - z + 1 = 0.$$

Solution. Voici la représentation de cette surface.



(b) Quel est le nom de cette quadrique ?

Solution. Cette quadrique est un paraboloïde elliptique.

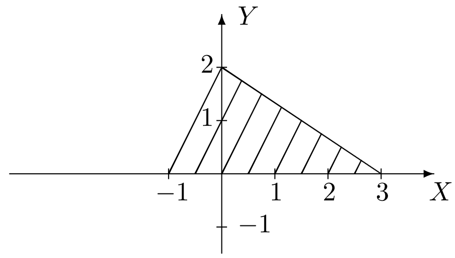
14. **Rechercher les extrema ainsi que les points-selles éventuels de la fonction**

$$f:\ (x,y)\mapsto f(x,y)=8x^3+y^3-3xy+1.$$

Solution. On a un point-selle en $(0,0)$ et un minimum local en $(1/4,1/2)$.

15. **On donne l'ensemble fermé hachuré A suivant. Déterminer**

$$\iint_A y\,e^{y-2x}dx\,dy.$$



Solution. La fonction $f:(x,y)\mapsto ye^{y-2x}$ est continue sur le fermé borné

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in[0,2],\ x\in\left[\frac{y-2}{2},3-\frac{3}{2}y\right]\right\};$$

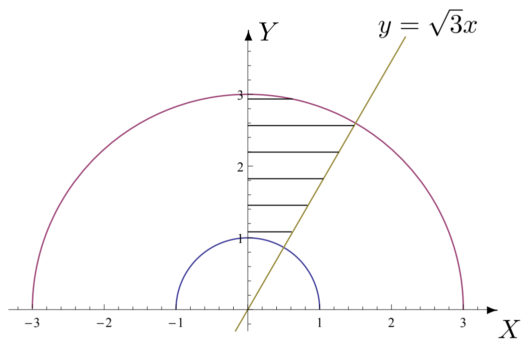
elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\iint_A ye^{y-2x}dx\,dy=\frac{25e^8-1}{32e^6}.$$

16. **Calculer, si possible l'intégrale suivante**

$$\iint_A \frac{x}{y}dxdy,$$

où A est l'ensemble fermé hachuré ci-dessous.



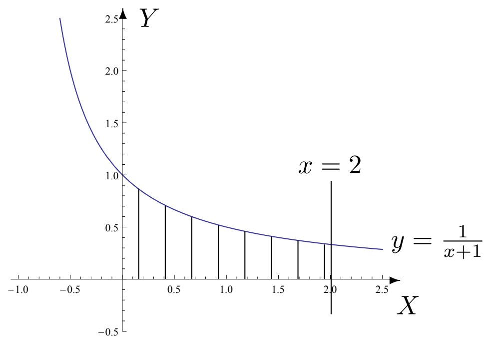
Solution. La fonction $f:(x,y)\mapsto \frac{x}{y}$ est continue sur le fermé borné A ; elle est donc intégrable sur cet ensemble et, en passant aux coordonnées polaires, on obtient

$$\iint_A \frac{x}{y}\ dxdy=\int_1^3\left(\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} r\,\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\ d\theta\right)dr=-4\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

17. **La fonction f étant supposée intégrable, permuter l'ordre d'intégration après avoir représenté l'ensemble d'intégration si**

$$I = \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{1}{x+1}} f(x,y)\ dy \right)\ dx.$$

Solution. Voici la représentation graphique de l'ensemble d'intégration



En permutant l'ordre d'intégration, on obtient

$$I = \int_0^{1/3} \left(\int_0^2 f(x,y)\, dx \right) dy + \int_{1/3}^1 \left(\int_0^{(1/y)-1} f(x,y)\, dx \right) dy.$$

18. Résoudre le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} Dx(t) = 2x(t) + 2y(t) \\ Dy(t) = x(t) + 3y(t). \end{cases}$$

Solution. Si C_1 et C_2 sont des constantes complexes arbitraires, on a

$$\begin{cases} x(t) = C_1\ e^t + C_2\ e^{4t} \\ y(t) = (-1/2)\ C_1 e^t + C_2\ e^{4t} \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$