Mathématiques générales II (MATH0009)

Année académique 2024-2025

Corrigé de l'examen du 10 juin 2025
Biologistes et géographes bloc 2

Version 17 mai 2025

QUESTIONNAIRE

THEORIE

Question 1 : QCM

Pour chaque question, il n'y a qu'un seul item correct. Réponse correcte : 1 point ; pas de réponse : 0 point ; réponse incorrecte : -0.25 point.

Pour chacune des questions, choisir parmi les différentes affirmations celle qui est correcte et colorier complètement la case qui la précède sur cette feuille.

1. Si r est un réel strictement négatif, que vaut $\sqrt{r^2}$?
   ☐ $\pm r$ ☐ r ☐ $-r$ ☐ Il n'est pas possible de répondre car on ne connaît pas r.
   ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
2. Si α est un réel appartenant à l'intervalle $]3\pi/2, 2\pi[$, alors on a toujours
   ☐ $\cos(\alpha) - \sin(\alpha) > 0$ ☐ $\cos(\alpha) - \sin(\alpha) < 0$ ☐ $\cos(\alpha)\sin(\alpha) > 0$ ☐ $\cos(\alpha) + \sin(\alpha) > 0$
   ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
3. Le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \ln(x^2+1)$ est
   ☐ $]0, +\infty[$ ☐ $\mathbb{R}_0$ ☐ $]-1, 1[$ ☐ $\mathbb{R}$ ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
4. Si z est un complexe, alors la partie imaginaire de iz^2 est toujours
   ☐ z^2 ☐ $\Re(z)$ ☐ $(\Re(z))^2$ ☐ $(\Re(z))^2 - (\Im(z))^2$ ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
5. Quelle est la condition nécessaire et suffisante que doit vérifier le réel θ pour que la fonction f définie par $f(y) = y^{-\theta^2}$, $y \in]0, +\infty[$, soit intégrable en 0 ?
   ☐ $\theta < 1$ ☐ $\theta > 1$ ☐ $\theta \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ ☐ $\theta \in]-1, 1[$
   ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
6. Soit A une matrice carrée de dimension 5. Si on multiplie les éléments de ses trois premières colonnes par 2, alors le déterminant de la nouvelle matrice est égal à
   ☐ $2^5 \det(A)$ ☐ $6 \det(A)$ ☐ $8 \det(A)$ ☐ $10 \det(A)$ ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.

Question 2 : VF

Réponse correcte : 1 point ; pas de réponse : 0 point ; réponse incorrecte : -0.5 point.

Pour chacune des questions, choisir parmi les différentes affirmations celle qui est correcte et colorier complètement la case qui la précède sur cette feuille.

1. Si une matrice carrée est inversible, il se peut que son carré ne le soit pas.
   ☐ Vrai ☐ Faux
2. Si on additionne deux solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, on obtient toujours une autre solution de cette équation.
   ☐ Vrai ☐ Faux

Question 3 : questions ouvertes

1. (1.1) Enoncer la propriété de la fonction exponentielle qui fait intervenir une somme et un produit.
   (1.2) Enoncer la propriété de la fonction logarithme népérien qui fait intervenir une somme et un produit.
2. (2.1) Qu'appelle-t-on matrice diagonale ?
   (2.2) Qu'appelle-t-on matrice diagonalisable ?
   (2.3) Qu'appelle-t-on matrice stochastique ?
3. (3.1) Définir les notions de valeur propre et de vecteur propre d'une matrice carrée.
   (3.2) Définir ce que l'on entend par « polynôme caractéristique d'une matrice carrée ».
   (3.3) Démontrer que si μ est une valeur propre de la matrice carrée A, alors μ annule le polynôme caractéristique de A.

$\boxed{\text{EXERCICES}}$

1. (1.1) Si elle existe, déterminer la limite $\lim_{x\to 0^+}(x\ \ln(x))$.

   (1.2) On donne la fonction $f : x \mapsto \ln(-x^2+4x-3)$. Où cette fonction f est-elle dérivable (donner le plus grand ensemble possible) ? Déterminer ensuite l'expression explicite de la dérivée.

   (1.3) On donne l'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq x\}$. Représenter cet ensemble A dans un repère orthonormé en le hachurant ou en le coloriant et en calculer l'aire.

2. Résoudre l'équation différentielle suivante, en spécifiant dans quel intervalle on travaille

$$-D^2 f(x) + 2Df(x) \ = \ x.$$

3. On donne la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (3.1) Cette matrice est-elle inversible ? Si oui, en déterminer l'inverse.
   (3.2) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de M.
   (3.3) La matrice M est-elle diagonalisable ? Si oui, en déterminer une forme diagonale ainsi que la matrice qui y conduit.

4. En colonie de vacances, chaque enfant doit manger au petit-déjeuner mais ne peut se servir, chaque jour, que d'un seul type d'aliment, confiture (C), fromage (F) ou miel (M). D'un jour à l'autre, il peut changer de choix. Après avoir observé son filleul Daniel, un encadrant des enfants constate que :
   - si Daniel mange du fromage un jour, il a 1 chance sur 3 de manger de la confiture et 2 chances sur 3 d'étaler du miel sur sa tartine le lendemain ;
   - s'il choisit du miel, le jour suivant il a autant de chance de manger du miel, du fromage ou de la confiture ;
   - enfin, s'il a pris de la confiture un jour, il n'en prend pas le lendemain et a autant de chance de prendre du miel ou du fromage.
   (4.1) Déterminer la matrice de transition.
   (4.2) Sachant que cette matrice est régulière, quelle est, à long terme, la probabilité que Daniel mange de la confiture ?, la probabilité que Daniel mange du fromage ?

CORRIGÉ

THEORIE

Question 1 : QCM

1. Si r est un réel strictement négatif, que vaut $\sqrt{r^2}$?
   ☐ $\pm r$ ☐ r ♣ $-r$ ☐ Il n'est pas possible de répondre car on ne connaît pas r.
   ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
2. Si α est un réel appartenant à l'intervalle $]3\pi/2, 2\pi[$, alors on a toujours
   ♣ $\cos(\alpha) - \sin(\alpha) > 0$ ☐ $\cos(\alpha) - \sin(\alpha) < 0$ ☐ $\cos(\alpha)\,\sin(\alpha) > 0$ ☐ $\cos(\alpha) + \sin(\alpha) > 0$
   ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
3. Le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \ln(x^2 + 1)$ est
   ☐ $]0, +\infty[$ ☐ $\mathbb{R}_0$ ☐ $]-1, 1[$ ♣ $\mathbb{R}$ ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
4. Si z est un complexe, alors la partie imaginaire de iz^2 est toujours
   ☐ z^2 ☐ $\Re(z)$ ☐ $(\Re(z))^2$ ♣ $(\Re(z))^2 - (\Im(z))^2$ ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
5. Quelle est la condition nécessaire et suffisante que doit vérifier le réel θ pour que la fonction f définie par $f(y) = y^{-\theta^2},\ y \in]0, +\infty[$, soit intégrable en 0 ?
   ☐ $\theta < 1$ ☐ $\theta > 1$ ☐ $\theta \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ ♣ $\theta \in]-1, 1[$
   ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
6. Soit A une matrice carrée de dimension 5. Si on multiplie les éléments de ses trois premières colonnes par 2, alors le déterminant de la nouvelle matrice est égal à
   ☐ $2^5 \det(A)$ ☐ $6 \det(A)$ ♣ $8 \det(A)$ ☐ $10 \det(A)$ ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.

Question 2 : VF

1. Si une matrice carrée est inversible, il se peut que son carré ne le soit pas.
   ☐ Vrai ♣ Faux
2. Si on additionne deux solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, on obtient toujours une autre solution de cette équation.
   ☐ Vrai ♣ Faux

Question 3 : questions ouvertes

1. **(1.1) Enoncer la propriété de la fonction exponentielle qui fait intervenir une somme et un produit.**
   (1.2) Enoncer la propriété de la fonction logarithme népérien qui fait intervenir une somme et un produit.
2. **(2.1) Qu'appelle-t-on matrice diagonale ?**
   (2.2) Qu'appelle-t-on matrice diagonalisable ?
   (2.3) Qu'appelle-t-on matrice stochastique ?
3. **(3.1) Définir les notions de valeur propre et de vecteur propre d'une matrice carrée.**
   (3.2) Définir ce que l'on entend par « polynôme caractéristique d'une matrice carrée ».
   (3.3) Démontrer que si μ est une valeur propre de la matrice carrée A, alors μ annule le polynôme caractéristique de A.

Pour une réponse, voir les notes de cours et/ou le cours enseigné.

EXERCICES

1. **(1.1) Si elle existe, déterminer la limite** $\lim_{x\to 0^+}(x \ln(x))$**.**

   Solution. La fonction $f : x \mapsto x \ln(x)$ est définie sur $]0, +\infty[$ et comme tout intervalle ouvert de type $]0, r[$ avec $r > 0$ est d'intersection non vide avec $]0, +\infty[$, la limite demandée a un sens.

   Si on essaie de passer directement à la limite, on obtient la forme indéterminée « $0 \times (-\infty)$ » et on ne sait donc pas conclure ; il faut donc procéder autrement.

Cette fonction peut aussi s'écrire sous la forme

$$f(x) \ = \ \frac{\ln(x)}{1/x};$$

posons alors a $g(x) = \ln(x)$ et $h(x) = 1/x$. On a $\lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to 0^+} h(x) = +\infty$; on obtient alors la forme indéterminée « ∞/∞ ». Pour lever cette indétermination, on utilise le théorème de l'Hospital.
Considérons $V =]0, r[$ avec $r > 0$ ainsi que les fonctions $g : x \mapsto \ln(x)$ et $h : x \mapsto 1/x$. Ces fonctions sont dérivables sur V, on a $Dh(x) = -1/x^2 \neq 0, \ \forall x \in V$ et les limites de ces fonctions en 0^+ sont infinies.
Dès lors, comme

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{Dg(x)}{Dh(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0,$$

on a

$$\lim_{x\to 0^+} (x \ \ln(x)) \ = \ 0.$$

(1.2) On donne la fonction $f : x \mapsto \ln(-x^2 + 4x - 3)$. Où cette fonction f est-elle dérivable (donner le plus grand ensemble possible) ? Déterminer ensuite l'expression explicite de la dérivée.

Solution. La fonction ln est dérivable sur $]0, +\infty[$. Dès lors, la fonction donnée est dérivable sur

$$\{x \in \mathbb{R} : -x^2 + 4x - 3 = (-x+1)(x-3) > 0\} =]1, 3[$$

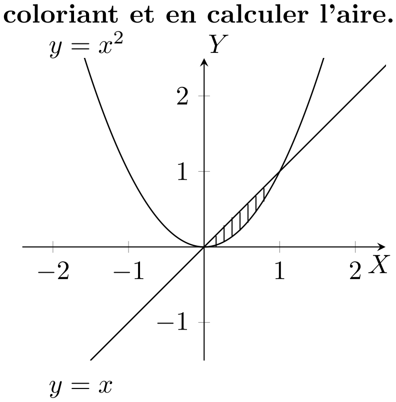
et on a

$$Df(x) = \frac{-2x+4}{-x^2+4x-3}, \quad x \in]1, 3[.$$

(1.3) On donne l'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq x\}$. Représenter cet ensemble A dans un repère orthonormé en le hachurant ou en le coloriant et en calculer l'aire.

Solution. L'ensemble A est la partie hachurée du plan ci-contre, les points des bords étant compris dans l'ensemble. Pour calculer l'aire de A, on doit intégrer la fonction $x \mapsto x - x^2$ sur l'intervalle $I = [0, 1]$ puisque les courbes se coupent aux points de coordonnées $(0, 0)$ et $(1, 1)$.
Comme la fonction est continue sur $\mathbb{R}$ elle l'est donc sur l'intervalle fermé borné I. Dès lors, elle est intégrable sur I et l'aire de A vaut

$$\int_0^1 (x - x^2) \ dx = \left[x^2/2 - x^3/3\right]_0^1 = 1/2 - 1/3 = 1/6.$$



2. **Résoudre l'équation différentielle suivante, en spécifiant dans quel intervalle on travaille**

$$-D^2 f(x) + 2Df(x) \ = \ x.$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre deux non homogène et le second membre est la fonction $x \mapsto g(x) = x$, laquelle est continue sur $\mathbb{R}$. On travaille donc dans $\mathbb{R}$.
Cela étant, l'équation homogène est $-D^2 f + 2Df = 0$ et le polynôme caractéristique de celle-ci est est $z \mapsto -z^2 + 2z = z(-z+2)$; les zéros de ce polynôme étant les nombres 0 et 2, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$c_1 e^{0x} + c_2 e^{2x} = c_1 + c_2 e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.
Cherchons une solution particulière. Comme le second membre $g(x) = x = xe^{0x}$ $(x \in \mathbb{R})$ est une fonction de type « exponentielle-polynôme » avec 0 zéro du polynôme caractéristique, on sait qu'une solution particulière a la forme

$$f_P(x) = (Ax + B)\,x \ = \ Ax^2 + Bx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

On a

$$Df_P(x) = 2Ax + B, \quad D^2 f_P(x) = 2A$$

donc, pour tout réel x,

$$\begin{aligned} -D^2 f_P(x) + 2Df_P(x) = x \quad &\Leftrightarrow \quad -2A + 2(2Ax + B) = x \\ &\Leftrightarrow \quad 4Ax - 2A + 2B = x; \end{aligned}$$

il s'ensuit que $4A = 1$ et $-2A + 2B = 0$, c'est-à-dire

$$A = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{4}.$$

Une solution particulière est donc la fonction

$$\frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de l'équation de départ sont donc les fonctions

$$c_1 + c_2 e^{2x} + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}, \quad x \in \mathbb{R},$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

3. **On donne la matrice**

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3.1) Cette matrice est-elle inversible ? Si oui, en déterminer l'inverse.
(3.2) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de M.
(3.3) La matrice M est-elle diagonalisable ? Si oui, en déterminer une forme diagonale ainsi que la matrice qui y conduit.

Solution. (3.1) La matrice M est inversible si et seulement si $\det(M) \neq 0$. Comme $\det(M) = 4 \neq 0$, la matrice donnée est donc inversible et on a

$$M^{-1} = \frac{1}{4} \widetilde{\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

(3.2) Les valeurs propres de M sont les zéros du polynôme caractéristique $\det(M - \lambda \mathbb{1})$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Comme on a

$$\det(M - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = (\lambda + 2i)\ (\lambda - 2i),$$

les valeurs propres de M sont $-2i$ et $2i$.
Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre $-2i$ c'est-à-dire les vecteurs non nuls

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

tels que $(M + 2i\ \mathbb{1})X = 0$. On a

$$(M + 2i\ \mathbb{1})X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2i & -1 \\ 4 & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2ix - y = 0.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre $-2i$ sont donc les vecteurs

$$X = c \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}, \ c \in \mathbb{C}_0.$$

Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre $2i$ c'est-à-dire les vecteurs non nuls

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

tels que $(M - 2i\ \mathbb{1})X = 0$. On a

$$(M - 2i\ \mathbb{1})X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2i & -1 \\ 4 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -2ix - y = 0.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre $2i$ sont donc les vecteurs

$$X = c \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{C}_0.$$

(3.3) Puisque les valeurs propres sont simples, la matrice M est diagonalisable.
Ainsi, par exemple la matrice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2i & -2i \end{pmatrix} \text{ est telle que } S^{-1}MS = \begin{pmatrix} -2i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}.$$

4. **En colonie de vacances, chaque enfant doit manger au petit-déjeûner mais ne peut se servir, chaque jour, que d'un seul type d'aliment, confiture (C), fromage (F) ou miel (M). D'un jour à l'autre, il peut changer de choix. Après avoir observé son filleul Daniel, un encadrant des enfants constate que :**
- si Daniel mange du fromage un jour, il a 1 chance sur 3 de manger de la confiture et 2 chances sur 3 d'étaler du miel sur sa tartine le lendemain ;
- s'il choisit du miel, le jour suivant il a autant de chance de manger du miel, du fromage ou de la confiture ;
- enfin, s'il a pris de la confiture un jour, il n'en prend pas le lendemain et a autant de chance de prendre du miel ou du fromage.
(4.1) Déterminer la matrice de transition.
(4.2) Sachant que cette matrice est régulière, quelle est, à long terme, la probabilité que Daniel mange de la confiture ?, la probabilité que Daniel mange du fromage ?

Solution. (4.1) Soient C_0, F_0 et M_0 les situations initiales respectives « manger de la confiture », « manger du fromage » et « manger du miel » ; soient C_1, F_1 et M_1, ces mêmes situations le lendemain. On a donc

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ F_1 \\ M_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ F_0 \\ M_0 \end{pmatrix}$$

et la matrice de transition T est

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

(4.2) Puisqu'on dit que la matrice de transition est régulière, la situation à long terme est donnée par le vecteur propre de probabilité de valeur propre 1. Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls X tels que $(T - \mathbb{1})X = 0$. On a successivement

$$(T - \mathbb{1})X = 0 \ \Leftrightarrow \ \begin{pmatrix} -1 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & -1 & 1/3 \\ 1/2 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} -x + y/3 + z/3 = 0 \\ x/2 - y + z/3 = 0 \\ x/2 + 2y/3 - 2z/3 = 0. \end{cases}$$

Dès lors, si on additionne les deux premières équations du système ci-dessus, on obtient l'équation $-x/2 - 2y/3 + 2z/3 = 0$, laquelle est équivalente à la troisième équation. Ainsi, le système est équivalent à celui dans lequel on ne conserve que les deux premières équations. On obtient donc

$$\begin{aligned} (T - \mathbb{1})X = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + y/3 + z/3 = 0 \\ x/2 - y + z/3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -3x + y + z = 0 \\ 3x - 6y + 2z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -5y + 3z = 0 \\ -9x + 8y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} z = 5y/3 \\ x = 8y/9. \end{cases} \end{aligned}$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont donc des vecteurs du type

$$c \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 15 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

Comme $c\ (8 + 9 + 15) = 1 \Leftrightarrow c = 1/32$, le vecteur propre de valeur propre 1 qui est de probabilité est le vecteur

$$\begin{pmatrix} 1/4 \\ 9/32 \\ 15/32 \end{pmatrix}.$$

A long terme, la probabilité que Daniel mange de la confiture est donc de $1/4$ et celle qu'il mange du fromage est de $9/32$.