Mathématiques générales II (MATH0009)

Année académique 2022-2023

Corrigé de l'examen du 13 juin 2023
Biologistes et géographes bloc 2

Version 9 mai 2023

QUESTIONNAIRE

THEORIE

Question 1 : QCM

Pour chaque question, il n'y a qu'un seul item correct. Réponse correcte : 1 point ; pas de réponse : 0 point ; réponse incorrecte : -0.25 point.

Pour chacune des questions, choisir parmi les différentes affirmations celle qui est correcte et **colorier complètement** la case qui la précède sur cette feuille.

1. Si z est un complexe, alors la partie réelle de $i\,\overline{z}^2$ est toujours
   ☐ $2\,\Re(z)\,\Im(z)$ ☐ 0 ☐ $(\Im(z))^2$ ☐ $-(\Im(z))^2$ ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
2. Si z est un complexe quelconque alors le module de $1 - iz$ est toujours égal à
   ☐ $|z-i|$ ☐ $|z|+1$ ☐ $|z+i|$ ☐ $|z-1|$ ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
3. Les valeurs propres de l'inverse d'une matrice carrée inversible sont toujours
   ☐ les mêmes que celles de la matrice de départ.
   ☐ les opposées de celles de la matrice de départ.
   ☐ les inverses de celles de la matrice de départ.
   ☐ les conjuguées de celles de la matrice de départ.
   ☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.
4. Soient A et B deux matrices carrées de même dimension. Si leur somme est inversible alors
   ☐ chacune des deux matrices est aussi inversible.
   ☐ au moins l'une des deux matrices est aussi inversible.
   ☐ leur produit est aussi inversible.
   ☐ leur différence est aussi inversible.
   ☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.
5. On considère la quadrique d'équation cartésienne $-x^2 - y/4 + z^2/5 = 1$. La trace de cette quadrique dans le plan $y = -8$ est
   ☐ une ellipse dont les foyers sont sur l'axe X.
   ☐ une ellipse dont les foyers sont sur l'axe Z.
   ☐ une hyperbole qui intersecte l'axe X.
   ☐ une hyperbole qui intersecte l'axe Z.
   ☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

Question 2 : VF

Réponse correcte : 1 point ; pas de réponse : 0 point ; réponse incorrecte : -0.5 point.

Pour chacune des questions, choisir parmi les différentes affirmations celle qui est correcte et **colorier complètement** la case qui la précède sur cette feuille.

1. La différence entre un complexe et son conjugué est toujours un nombre réel.
   ☐ Vrai ☐ Faux
2. Si A est une matrice carrée, alors elle est inversible si et seulement si son carré est aussi inversible.
   ☐ Vrai ☐ Faux

Question 3 : questions ouvertes

1. (a) Définir les notions de valeur propre et de vecteur propre d'une matrice carrée.
   (b) Définir ce que l'on entend par ≪ polynôme caractéristique d'une matrice carrée ≫.
   (c) Démontrer que si μ est une valeur propre de la matrice carrée A, alors μ annule le polynôme caractéristique de A.
2. (a) Que représente la notation $C_1(\Omega)$ (Ω est un ouvert du plan) ?
   (b) Soient f une fonction de deux variables réelles appartenant à $C_1(]0,+\infty[\times]-1,1[)$ et f_1, f_2 deux fonctions d'une variable réelle dérivables sur l'intervalle $]a,b[$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Dans quel ensemble la fonction composée $F = f(f_1, f_2)$ est-elle dérivable ? Et quelle est l'expression de sa dérivée en fonction des dérivées de f, f_1, f_2 ?

EXERCICES

1. (a) Soit un repère orthonormé. Déterminer une équation cartésienne du cercle centré en $(-1,0)$ et de rayon 2.

   (b) Déterminer les solutions de l'équation différentielle suivante.

$$D^2 f = -Df$$

   (c) Déterminer si l'intégrale suivante existe et si c'est le cas, en donner la valeur.

$$\int_{-\infty}^{0} x\ e^{3x}\ dx$$

2. On considère une population de saumons femelles. En moyenne, deux neuvièmes meurent la première année. Durant la deuxième année, ils donnent naissance en moyenne à un juvénile femelle par individu, puis les six septièmes meurent. Chaque poisson qui survit la troisième année donne encore naissance en moyenne à deux juvéniles femelles avant de mourir.

   (a) Si l'on désigne respectivement par $j(t)$, $p(t)$ et $a(t)$ les effectifs à l'année t des saumons femelles juvéniles, des saumons femelles préadultes (poissons de 1 an) et des saumons femelles adultes (poissons de 2 ans), comment peuvent s'écrire les informations précédentes ? En déduire l'écriture de la matrice de Leslie L correspondante.

   (b) Vérifier que 1 est une valeur propre de L de vecteur propre

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. On donne la fonction f explicitement par

$$f(x,y) = \sqrt{\ln(x/y)}.$$

   (a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction.

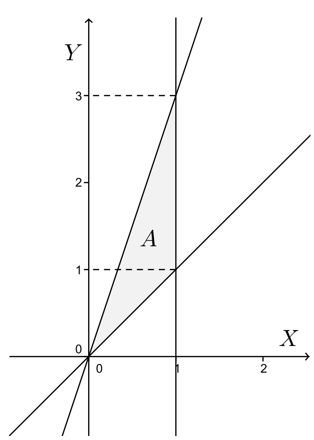
   (b) Dans un repère orthonormé, représenter ce domaine en le hachurant.

   (c) Calculer l'expression suivante en tout point de ce domaine et la simplifier au maximum.

$$xD_x f(x,y) + yD_y f(x,y)$$

4. Déterminer les valeurs des intégrales suivantes où A est l'ensemble fermé grisé ci-dessous.

$$I_1 = \iint_{[-\pi/2,\pi]\times[0,\pi]} y\ \sin(2x+y)\ dx\ dy \qquad I_2 = \iint_A \frac{1}{x^2+1}\ dx\ dy$$



CORRIGÉ

THEORIE

Question 1 : QCM

1. Si z est un complexe, alors la partie réelle de $i\,\overline{z}^2$ est toujours
   ♣ $2\,\Re(z)\,\Im(z)$ ☐ 0 ☐ $(\Im(z))^2$ ☐ $-(\Im(z))^2$ ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
2. Si z est un complexe quelconque alors le module de $1-iz$ est toujours égal à
   ☐ $|z-i|$ ☐ $|z|+1$ ♣ $|z+i|$ ☐ $|z-1|$ ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
3. Les valeurs propres de l'inverse d'une matrice carrée inversible sont toujours
   ☐ les mêmes que celles de la matrice de départ.
   ☐ les opposées de celles de la matrice de départ.
   ♣ les inverses de celles de la matrice de départ.
   ☐ les conjuguées de celles de la matrice de départ.
   ☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.
4. Soient A et B deux matrices carrées de même dimension. Si leur somme est inversible alors
   ☐ chacune des deux matrices est aussi inversible.
   ☐ au moins l'une des deux matrices est aussi inversible.
   ☐ leur produit est aussi inversible.
   ☐ leur différence est aussi inversible.
   ♣ Aucune des autres propositions n'est correcte.
5. On considère la quadrique d'équation cartésienne $-x^2-y/4+z^2/5=1$. La trace de cette quadrique dans le plan $y=-8$ est
   ☐ une ellipse dont les foyers sont sur l'axe X.
   ☐ une ellipse dont les foyers sont sur l'axe Z.
   ♣ une hyperbole qui intersecte l'axe X.
   ☐ une hyperbole qui intersecte l'axe Z.
   ☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

Question 2 : VF

1. La différence entre un complexe et son conjugué est toujours un nombre réel.
   ☐ Vrai ♣ Faux
2. Si A est une matrice carrée, alors elle est inversible si et seulement si son carré est aussi inversible.
   ♣ Vrai ☐ Faux

Question 3 : questions ouvertes

1. **(a) Définir les notions de valeur propre et de vecteur propre d'une matrice carrée.**
   (b) Définir ce que l'on entend par ≪ polynôme caractéristique d'une matrice carrée ≫.
   (c) Démontrer que si μ est une valeur propre de la matrice carrée A, alors μ annule le polynôme caractéristique de A.
2. **(a) Que représente la notation $C_1(\Omega)$ (Ω est un ouvert du plan) ?**
   (b) Soient f une fonction de deux variables réelles appartenant à $C_1(]0,+\infty[\times]-1,1[)$ et f_1, f_2 deux fonctions d'une variable réelle dérivables sur l'intervalle $]a,b[$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Dans quel ensemble la fonction composée $F=f(f_1,f_2)$ est-elle dérivable ? Et quelle est l'expression de sa dérivée en fonction des dérivées de f, f_1, f_2 ?

Pour une réponse, voir les notes de cours et/ou le cours enseigné.

EXERCICES

1. **(a) Soit un repère orthonormé. Déterminer une équation cartésienne du cercle centré en $(-1,0)$ et de rayon 2.**
   Solution.

Dans un repère orthonormé, le cercle centré en $(-1,0)$ et de rayon 2 a pour équation cartésienne

$$(x+1)^2+y^2=4$$

ou, de manière équivalente

$$x^2+y^2+2x-3=0.$$

(b) Déterminer les solutions de l'équation différentielle suivante.

$$D^2f=-Df$$

Solution. L'équation donnée peut s'écrire $D^2f+Df=0$; c'est une équation différentielle linéaire à coefficients constants homogène d'ordre 2 .
Le polynôme caractéristique est $z\mapsto z^2+z=z(z+1)$ et ses zéros sont 0 et -1. Il s'ensuit que les solutions de cette équation sont les fonctions

$$f(x)=c_1e^{0x}+c_2e^{-x}=c_1+c_2e^{-x},\ x\in\mathbb{R}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

(c) Déterminer si l'intégrale suivante existe et si c'est le cas, en donner la valeur.

$$\int_{-\infty}^{0} x\ e^{3x}\ dx$$

Solution. La fonction $x\mapsto xe^{3x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs négatives lorsque x est négatif. Elle est donc intégrable sur $]-\infty,0]$ si la limite

$$\lim_{t\to-\infty}\int_t^0 |xe^{3x}|\ dx=-\lim_{t\to-\infty}\int_t^0 xe^{3x}\ dx$$

est finie. Autrement dit, elle est intégrable sur $]-\infty,0]$ si la limite

$$\lim_{t\to-\infty}\int_t^0 xe^{3x}\ dx$$

est finie, auquel cas la valeur de la limite sera la valeur de l'intégrale recherchée.
Cela étant, quel que soit $t<0$, une intégration par parties puis par variation de primitive donne directement

$$\begin{aligned}\int_t^0 xe^{3x}\ dx &= \frac{1}{3}\int_t^0 xDe^{3x}\ dx\\ &= -\frac{1}{3}\,te^{3t}\ -\ \frac{1}{3}\int_t^0 e^{3x}\ dx\\ &= -\frac{1}{3}\,te^{3t}\ -\ \frac{1}{9}\int_t^0 De^{3x}\ dx\\ &= -\frac{1}{3}\,te^{3t}-\ \frac{1}{9}\left(1-e^{3t}\right).\end{aligned}$$

Ainsi, vu les propriétés de la fonction exponentielle, on obtient

$$\lim_{t\to-\infty}\int_t^0 xe^{3x}\ dx\ =\ \lim_{t\to-\infty}\left(-\frac{1}{3}\,te^{3t}-\ \frac{1}{9}\left(1-e^{3t}\right)\right)\ =\ -\frac{1}{9}.$$

2. **On considère une population de saumons femelles. En moyenne, deux neuvièmes meurent la première année. Durant la deuxième année, ils donnent naissance en moyenne à un juvénile femelle par individu, puis les six septièmes meurent. Chaque poisson qui survit la troisième année donne encore naissance en moyenne à deux juvéniles femelles avant de mourir.**

(a) Si l'on désigne respectivement par $j(t)$, $p(t)$ et $a(t)$ les effectifs à l'année t des saumons femelles juvéniles, des saumons femelles préadultes (poissons de 1 an) et des saumons femelles adultes (poissons de 2 ans), comment peuvent s'écrire les informations précédentes ? En déduire l'écriture de la matrice de Leslie L correspondante.

(b) Vérifier que 1 est une valeur propre de L de vecteur propre

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Solution.

(a) Puisque, pour toute année t ($t \in \mathbb{N}_0$), $j(t)$ est le nombre de saumons femelles juvéniles, $p(t)$ le nombre de saumons femelles préadultes et $a(t)$ celui des adultes, les hypothèses du modèle se traduisent par les trois équations

$$\begin{cases} j(t+1) \;=\; p(t) + 2a(t) \\ p(t+1) \;=\; 7/9\, j(t) \\ a(t+1) = 1/7\, p(t); \end{cases}$$

sous format matriciel, on obtient

$$\begin{pmatrix} j(t+1) \\ p(t+1) \\ a(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 7/9 & 0 & 0 \\ 0 & 1/7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j(t) \\ p(t) \\ a(t) \end{pmatrix}.$$

La matrice de Leslie dans ce cas est donc la matrice L définie par

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 7/9 & 0 & 0 \\ 0 & 1/7 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Par définition, un vecteur non nul X vérifiant $LX = \lambda_0 X$ est un vecteur propre de la matrice L de valeur propre λ_0. Soit le vecteur non nul

$$X = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$LX = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 7/9 & 0 & 0 \\ 0 & 1/7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = 1X.$$

En conclusion, 1 est une valeur propre de L de vecteur propre

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. **On donne la fonction f explicitement par**

$$f(x,y) = \sqrt{\ln(x/y)}.$$

(a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction.

(b) Dans un repère orthonormé, représenter ce domaine en le hachurant.

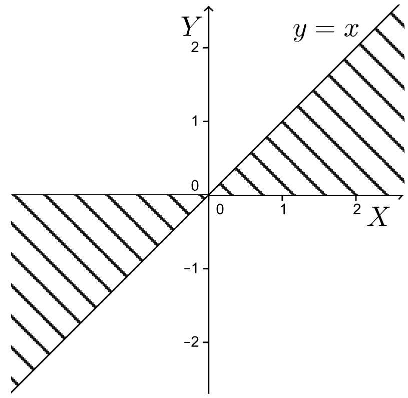
(c) Calculer l'expression suivante en tout point de ce domaine et la simplifier au maximum.

$$xD_x f(x,y) + yD_y f(x,y)$$

Solution. (a) Comme les fonctions logarithme et racine carrée sont indéfiniment continûment dérivables sur $]0, +\infty[$, la fonction donnée l'est aussi sur

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0, x/y > 0, \ln(x/y) > 0\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0, x/y > 1\right\}.$$

(b) Sa représentation graphique est la partie hachurée du plan ci-dessous, les points de la droite et de l'axe des abscisses exclus.



(c) Pour tout $(x, y) \in \Omega$, on a

$$D_x f(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\ln(x/y)}} \times \frac{1}{x/y} \times \frac{1}{y} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln(x/y)}}$$

et

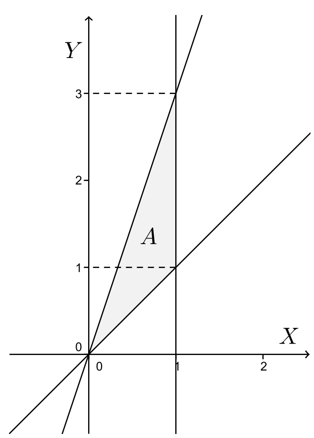
$$D_y f(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\ln(x/y)}} \times \frac{1}{x/y} \times \left(\frac{-x}{y^2}\right) = \frac{-1}{2y\sqrt{\ln(x/y)}},$$

donc on obtient

$$xD_x f(x, y) + yD_y f(x, y) = \frac{x}{2x\sqrt{\ln(x/y)}} + \frac{-y}{2y\sqrt{\ln(x/y)}} = \frac{1}{2\sqrt{\ln(x/y)}} - \frac{1}{2\sqrt{\ln(x/y)}} = 0.$$

4. **Déterminer les valeurs des intégrales suivantes où A est l'ensemble fermé grisé ci-dessous.**

$$I_1 = \iint_{[-\pi/2,\pi]\times[0,\pi]} y \ \sin(2x + y) \ dx \ dy \qquad I_2 = \iint_A \frac{1}{x^2 + 1} \ dx \ dy$$



Solution.
Première intégrale
La fonction $(x, y) \mapsto y \sin(2x+y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$; elle est donc intégrable sur tout ensemble fermé borné ; c'est le cas ici puisque l'ensemble d'intégration est le rectangle fermé borné $[-\pi/2, \pi] \times [0, \pi]$. On

peut donc calculer l'intégrale dans n'importe quel ordre. En intégrant d'abord par rapport à x puis par rapport à y par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
I_1 = \iint_{[-\pi/2,\pi]\times[0,\pi]} y\ \sin(2x+y)\ dx\ dy &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} y \left(\int_{-\pi/2}^{\pi} 2\sin(2x+y)\, dx\right)\ dy \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} y \left(\int_{-\pi/2}^{\pi} D_x\cos(2x+y)\, dx\right)\ dy \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} y \Big(\cos(2\pi+y)-\cos(-\pi+y)\Big)\ dy \\
&= -\int_0^{\pi} y\cos(y)\, dy \\
&= -\int_0^{\pi} yD\sin(y)\, dy \\
&= \int_0^{\pi} \sin(y)\, dy \\
&= \Big[-\cos(y)\Big]_0^{\pi} \\
&= -\cos(\pi)+\cos(0) \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Seconde intégrale

Les trois droites représentées ont pour équation $x=1$, $y=x$ et $y=3x$.

La fonction $(x,y)\mapsto 1/(x^2+1)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$; elle est donc intégrable sur tout ensemble fermé borné. Ici l'ensemble d'intégration est l'ensemble fermé

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x\in[0,1],\ y\in[x,3x]\right\},$$

lequel est inclus dans le rectangle borné $[0,1]\times[0,3]$. Cet ensemble d'intégration étant fermé borné, la fonction est intégrable sur A et on peut calculer l'intégrale dans n'importe quel ordre.

L'écriture de l'ensemble d'intégration en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses se fait en deux parties. Il est donc plus simple de calculer de la manière suivante. On a

$$I_2=\int_0^1\left(\int_x^{3x}\frac{1}{x^2+1}\ dy\right)\ dx=\int_0^1\frac{1}{x^2+1}\left(\int_x^{3x}\ dy\right)\ dx.$$

Cela étant, comme

$$\int_x^{3x}\ dy\ =\ 2x,$$

on obtient directement

$$I_2\ =\ \int_0^1\frac{2x}{x^2+1}\,dx\ =\ \int_0^1 D(x^2+1)\frac{1}{x^2+1}\,dx\ =\ \left[\ln(x^2+1)\right]_0^1\ =\ \ln(2)-\ln(1)\ =\ \ln(2).$$