LIÈGE université Sciences

Mathématiques générales II (MATH0009)

Année académique 2022-2023

Corrigé de l'examen d'août 2023
Biologistes et géographes bloc 2

Version 15 juillet 2023

QUESTIONNAIRE

THEORIE

Question 1 : QCM

Pour chaque question, il n'y a qu'un seul item correct. Réponse correcte : 1 point ; pas de réponse : 0 point ; réponse incorrecte : -0.25 point.
Pour chacune des questions, choisir parmi les différentes affirmations celle qui est correcte et **colorier complètement** la case qui la précède sur cette feuille.

1. Si z est un complexe, alors la partie réelle de $\overline{z} + iz$ est toujours
   ☐ $\Re(z)$ ☐ $\Re(z) - \Im(z)$ ☐ $-\Im(z)$ ☐ $\overline{z}$ ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
2. Si z est un complexe quelconque alors le module de $z^2 + i$ est toujours égal à
   ☐ $|iz^2 + 1|$ ☐ $|z|^2 + 1$ ☐ $|iz^2 - 1|$ ☐ $\sqrt{z^4 + 1}$ ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
3. Soit A une matrice carrée. Les valeurs propres de $-A$ sont toujours
   ☐ les mêmes que celles de la matrice de départ.
   ☐ les opposées de celles de la matrice de départ.
   ☐ les inverses de celles de la matrice de départ.
   ☐ les conjuguées de celles de la matrice de départ.
   ☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.
4. Soient A et B deux matrices carrées de même dimension. Si leur produit est inversible alors
   ☐ leur somme est aussi inversible.
   ☐ leur différence est aussi inversible.
   ☐ chacune des deux matrices est aussi inversible.
   ☐ chacune des deux matrices possède au moins une valeur propre nulle.
   ☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.
5. On considère la quadrique d'équation cartésienne $-2x^2 - y + z^2/5 = -1$. La trace de cette quadrique dans le plan $y = -6$ est
   ☐ une ellipse dont les foyers sont sur l'axe X.
   ☐ une ellipse dont les foyers sont sur l'axe Z.
   ☐ une hyperbole qui intersecte l'axe X.
   ☐ une hyperbole qui intersecte l'axe Z.
   ☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

Question 2 : VF

Réponse correcte : 1 point ; pas de réponse : 0 point ; réponse incorrecte : -0.5 point.
Pour chacune des questions, choisir parmi les différentes affirmations celle qui est correcte et **colorier complètement** la case qui la précède sur cette feuille.

1. Si z est un complexe non réel et non imaginaire pur, alors la différence $z^2 - \overline{z}^2$ est toujours un nombre imaginaire pur
   ☐ Vrai ☐ Faux
2. La somme de deux matrices stochastiques est encore une matrice stochastique.
   ☐ Vrai ☐ Faux

Question 3 (Question ouverte)

(a) Définir les notions de valeur propre et de vecteur propre d'une matrice carrée.
(b) Définir ce que l'on entend par ≪ polynôme caractéristique d'une matrice carrée ≫.
(c) On a le résultat suivant : *si μ est une valeur propre de la matrice carrée A, alors μ annule le polynôme caractéristique de A.* Quelle est l'hypothèse ? Quelle est la thèse ? Démontrer ensuite le résultat.

Question 4 (Question ouverte)

(a) Que représente la notation $C_1(\Omega)$? (avec Ω est un ouvert du plan) ?
(b) Soient f une fonction de deux variables réelles appartenant à $C_1(]-\infty, 1[\times]0, +\infty[)$ et f_1, f_2 deux fonctions d'une variable réelle dérivables sur l'intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Dans quel ensemble

la fonction composée $F = f(f_1, f_2)$ est-elle dérivable ? Et quelle est l'expression de sa dérivée en fonction des dérivées de f, f_1, f_2 ?

EXERCICES

1. (a) Soit un repère orthonormé. Déterminer une équation cartésienne du cercle centré en $(-2, 3)$ et de rayon 2.

   (b) Déterminer les solutions de l'équation différentielle suivante.
$$D^2 f = -f$$

   (c) Déterminer si l'intégrale suivante existe et si c'est le cas, en donner la valeur.
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{9x^2 + 12x + 4} \; dx$$

2. On se propose d'étudier l'évolution d'une population de rates. En moyenne, on a les observations (très simplificatrices) suivantes :
   - une femelle de moins d'un an n'est pas féconde ;
   - chaque femelle donne, en moyenne, naissance à 6 femelles durant sa deuxième année et à 10 femelles pendant sa troisième année ;
   - une rongeuse sur deux survit au-delà de sa première année ;
   - 4 rates sur 10 qui sont encore vivantes à la fin de la deuxième année vont survivre, mais pas au-delà d'une troisième année.

   Ces hypothèses conduisent à distinguer trois classes en fonction de l'âge des rates ; selon qu'elles ont moins d'un an, au moins un an mais moins de deux ans ou au moins deux ans, les femelles sont répertoriées comme étant respectivement des juvéniles, des préadultes ou des adultes.

   (a) Comment peuvent s'écrire les informations précédentes ? En déduire l'écriture de la matrice de Leslie L correspondante.

   (b) Sachant que le vecteur
$$\begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   est vecteur propre de L, déterminer la valeur propre correspondante.

   (c) Sachant que -1 est valeur propre de la matrice L, déterminer les vecteurs propres relatifs à cette valeur propre.

3. On donne la fonction f explicitement par
$$f(x, y) = \arctan\left(\sqrt{2x^2 - y}\right).$$

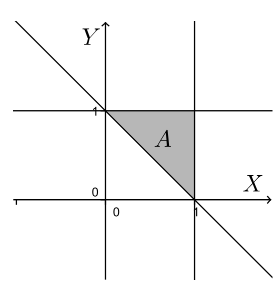
   (a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction.

   (b) Dans un repère orthonormé, représenter ce domaine en le hachurant.

   (c) Calculer l'expression suivante en tout point de ce domaine et la simplifier au maximum.
$$xD_x f(x, y) + 2yD_y f(x, y)$$

4. Déterminer les valeurs des intégrales suivantes où A est l'ensemble fermé grisé ci-contre.

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{[\ln(2), \ln(4)] \times [1/2, 1]} e^{x+2y} \; dx \; dy \\ I_2 &= \iint_A \cos(x^2) \; dx \; dy \end{aligned}$$



CORRIGÉ

THEORIE

Question 1 : QCM

1. Si z est un complexe, alors la partie réelle de $\overline{z} + iz$ est toujours
   ☐ $\Re(z)$ ♣ $\Re(z) - \Im(z)$ ☐ $-\Im(z)$ ☐ $\overline{z}$ ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
2. Si z est un complexe quelconque alors le module de $z^2 + i$ est toujours égal à
   ☐ $|iz^2 + 1|$ ☐ $|z|^2 + 1$ ♣ $|iz^2 - 1|$ ☐ $\sqrt{z^4 + 1}$ ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
3. Soit A une matrice carrée. Les valeurs propres de $-A$ sont toujours
   ☐ les mêmes que celles de la matrice de départ.
   ♣ les opposées de celles de la matrice de départ.
   ☐ les inverses de celles de la matrice de départ.
   ☐ les conjuguées de celles de la matrice de départ.
   ☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.
4. Soient A et B deux matrices carrées de même dimension. Si leur produit est inversible alors
   ☐ leur somme est aussi inversible.
   ☐ leur différence est aussi inversible.
   ♣ chacune des deux matrices est aussi inversible.
   ☐ chacune des deux matrices possède au moins une valeur propre nulle.
   ☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.
5. On considère la quadrique d'équation cartésienne $-2x^2 - y + z^2/5 = -1$. La trace de cette quadrique dans le plan $y = -6$ est
   ☐ une ellipse dont les foyers sont sur l'axe X.
   ☐ une ellipse dont les foyers sont sur l'axe Z.
   ♣ une hyperbole qui intersecte l'axe X.
   ☐ une hyperbole qui intersecte l'axe Z.
   ☐ Aucune des autres propositions n'est correcte.

Question 2 : VF

1. Si z est un complexe non réel et non imaginaire pur, alors la différence $z^2 - \overline{z}^2$ est toujours un nombre imaginaire pur
   ♣ Vrai ☐ Faux
2. La somme de deux matrices stochastiques est encore une matrice stochastique.
   ☐ Vrai ♣ Faux

Question 3 (Question ouverte)

(a) Définir les notions de valeur propre et de vecteur propre d'une matrice carrée.
(b) Définir ce que l'on entend par ≪ polynôme caractéristique d'une matrice carrée ≫.
(c) On a le résultat suivant : *si μ est une valeur propre de la matrice carrée A, alors μ annule le polynôme caractéristique de A*. Quelle est l'hypothèse ? Quelle est la thèse ? Démontrer ensuite le résultat.

Question 4 (Question ouverte)

(a) Que représente la notation $C_1(\Omega)$? (avec Ω est un ouvert du plan) ?
(b) Soient f une fonction de deux variables réelles appartenant à $C_1(]-\infty, 1[\times]0, +\infty[)$ et f_1, f_2 deux fonctions d'une variable réelle dérivables sur l'intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Dans quel ensemble la fonction composée $F = f(f_1, f_2)$ est-elle dérivable ? Et quelle est l'expression de sa dérivée en fonction des dérivées de f, f_1, f_2 ?

Pour une réponse, voir les notes de cours et le cours enseigné.

EXERCICES

1. **(a) Soit un repère orthonormé. Déterminer une équation cartésienne du cercle centré en $(-2,3)$ et de rayon 2.**

   Solution.

   Dans un repère orthonormé, le cercle centré en $(-2,3)$ et de rayon 2 a pour équation cartésienne
   $$(x+2)^2+(y-3)^2=4$$
   ou, de manière équivalente
   $$x^2+y^2+4x-6y+9=0.$$

   (b) Déterminer les solutions de l'équation différentielle $D^2f=-f$.

   Solution. L'équation donnée peut s'écrire $D^2f+f=0$; c'est une équation différentielle linéaire à coefficients constants homogène d'ordre 2.

   Le polynôme caractéristique est $z\mapsto z^2+1$ et ses zéros sont $-i$ et i. Il s'ensuit que les solutions de cette équation sont les fonctions
   $$f(x)=c_1e^{-ix}+c_2e^{ix},\ x\in\mathbb{R}$$
   où c_1 et c_2 sont des constantes complexes arbitraires. De manière équivalente, les solutions de cette équation sont les fonctions
   $$f(x)=c_1\cos(x)+c_2\sin(x),\ x\in\mathbb{R}$$
   où c_1 et c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

   (c) Déterminer si l'intégrale suivante existe et si c'est le cas, en donner la valeur.
   $$\int_0^{+\infty}\frac{1}{9x^2+12x+4}\ dx$$

   Solution. On a $9x^2+12x+4=(3x+2)^2$; ainsi la fonction $x\mapsto 1/(9x^2+12x+4)$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-2/3\}$ donc également sur $[0,+\infty[$. Comme elle est à valeurs positives, elle est intégrable sur $[0,+\infty[$ si la limite
   $$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t\frac{1}{9x^2+12x+4}\ dx$$
   est finie, auquel cas la valeur de la limite sera la valeur de l'intégrale recherchée.

   Cela étant, quel que soit $t>0$, une intégration directe par variation de primitive donne directement
   $$\begin{aligned}\int_0^t\frac{1}{9x^2+12x+4}\ dx &= \int_0^t\frac{1}{(3x+2)^2}\ dx\\ &= -\frac{1}{3}\int_0^t D\frac{1}{3x+2}\ dx\\ &= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3t+2}-\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$
   Ainsi, on obtient
   $$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t\frac{1}{9x^2+12x+4}\ dx=-\frac{1}{3}\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{3t+2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}.$$

2. **On se propose d'étudier l'évolution d'une population de rates. En moyenne, on a les observations (très simplificatrices) suivantes :**

   - une femelle de moins d'un an n'est pas féconde ;

   - chaque femelle donne, en moyenne, naissance à 6 femelles durant sa deuxième année et à 10 femelles pendant sa troisième année ;

   - une rongeuse sur deux survit au-delà de sa première année ;

   - 4 rates sur 10 qui sont encore vivantes à la fin de la deuxième année vont survivre, mais pas au-delà d'une troisième année.

Ces hypothèses conduisent à distinguer trois classes en fonction de l'âge des rates ; selon qu'elles ont moins d'un an, au moins un an mais moins de deux ans ou au moins deux ans, les femelles sont répertoriées comme étant respectivement des juvéniles, des préadultes ou des adultes.
(a) Comment peuvent s'écrire les informations précédentes ? En déduire l'écriture de la matrice de Leslie L correspondante.
(b) Sachant que le vecteur

$$\begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

est vecteur propre de L, déterminer la valeur propre correspondante.
(c) Sachant que -1 est valeur propre de la matrice L, déterminer les vecteurs propres relatifs à cette valeur propre.
Solution.
(a) Pour toute année t ($t \in \mathbb{N}_0$), notons $j(t)$ le nombre de rates juvéniles, $p(t)$ le nombre de rates préadultes et $a(t)$ celui des rates adultes. Les hypothèses du modèle se traduisent alors par les trois équations

$$\begin{cases} j(t+1) &= 6p(t) + 10a(t) \\ p(t+1) &= (1/2)\, j(t) \\ a(t+1) &= (4/10)\, p(t) = (2/5)\, p(t); \end{cases}$$

sous format matriciel, on obtient

$$\begin{pmatrix} j(t+1) \\ p(t+1) \\ a(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j(t) \\ p(t) \\ a(t) \end{pmatrix}.$$

La matrice de Leslie dans ce cas est donc la matrice L définie par

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Par définition, un vecteur non nul X vérifiant $LX = \lambda_0 X$ est un vecteur propre de la matrice L de valeur propre λ_0. Avec le vecteur non nul

$$X = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix},$$

on a

$$LX = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} = 2X.$$

En conclusion, 2 est une valeur propre de L et

$$X = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en est un vecteur propre.
(c) On doit chercher les vecteurs

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

non nuls tels que

$$(L + 1\mathbb{1})\, X = 0.$$

On a successivement

$$
\begin{aligned}
(L + 1\!\!1)\, X = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 6 & 10 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2/5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + 6y + 10z = 0 \\ x/2 + y = 0 \\ 2y/5 + z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + 6y + 10z = 0 \\ x + 2y = 0 \\ 2y + 5z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2y + 5z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -2y \\ z = (-2/5)\, y. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -1 sont donc les vecteurs

$$X = c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2/5 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

3. **On donne la fonction f explicitement par**

$$f(x, y) = \arctan\left(\sqrt{2x^2 - y}\right).$$

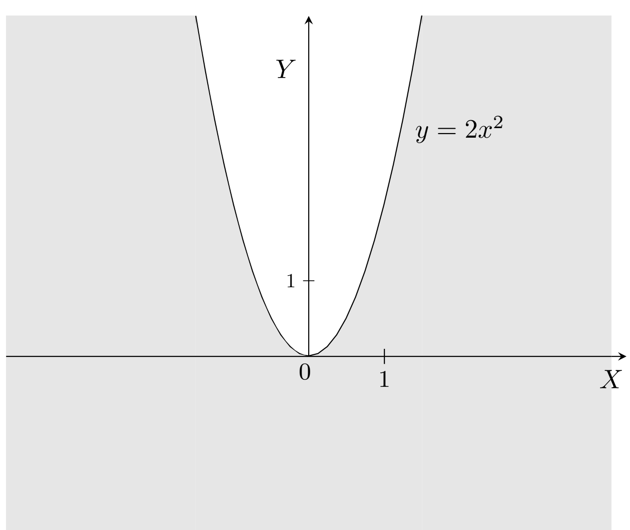
(a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction.
(b) Dans un repère orthonormé, représenter ce domaine en le hachurant.
(c) Calculer l'expression suivante en tout point de ce domaine et la simplifier au maximum.

$$x D_x f(x, y) + 2y D_y f(x, y)$$

Solution. (a) Comme la fonction arctan est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et que la fonction racine carrée est indéfiniment continûment dérivable sur $]0, +\infty[$, la fonction donnée l'est aussi sur

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 - y > 0\right\}.$$

(b) Sa représentation graphique est la partie du plan grisée non bornée ci-dessous, les points de la parabole d'équation $y = 2x^2$ étant exclus.



(c) On a

$$D \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

et $D\sqrt{x} = 1/(2\sqrt{x})$ pour tout $x > 0$. Il s'ensuit que pour tout $(x, y) \in \Omega$, on a

$$D_x f(x,y) = \frac{1}{1+2x^2-y} \times \frac{1}{2\sqrt{2x^2-y}} \times 4x = \frac{2x}{(1+2x^2-y)\ \sqrt{2x^2-y}}$$

et

$$D_y f(x,y) = \frac{1}{1+2x^2-y} \times \frac{1}{2\sqrt{2x^2-y}} \times (-1).$$

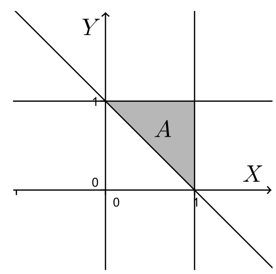
On obtient ainsi

$$xD_x f(x,y) + 2yD_y f(x,y) \ = \frac{2x^2-y}{(1+2x^2-y)\ \sqrt{2x^2-y}} = \frac{\sqrt{2x^2-y}}{1+2x^2-y}, \quad \forall (x,y) \in \Omega.$$

4. Déterminer les valeurs des intégrales suivantes où A est l'ensemble fermé grisé ci-contre.

$$I_1 \ = \ \iint_{[\ln(2),\ln(4)]\times[1/2,1]} e^{x+2y}\ dx\ dy$$

$$I_2 \ = \ \iint_A \cos(x^2)\ dx\ dy$$



Solution.

Première intégrale

L'ensemble d'intégration est un rectangle fermé borné parallèle aux axes et la fonction à intégrer est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc sur cet ensemble fermé borné ; elle est donc intégrable sur le rectangle donné. De plus, la fonction est à variables séparées puisqu'elle s'écrit explicitement $e^x \times e^{2y}$. Par deux intégrations par variation de primitive, on a donc directement

$$I_1 = \int_{\ln(2)}^{\ln(4)} e^x\ dx\ \times\ \int_{1/2}^{1} e^{2y}\ dy = \left(e^{\ln(4)} - e^{\ln(2)}\right) \times \frac{1}{2}\left(e^2 - e^1\right) = e^2 - e.$$

Seconde intégrale

La droite passant par les points de coordonnées $(1, 0)$ et $(0, 1)$ a pour équation cartésienne $x + y = 1$; on a donc

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1]\ \&\ y \in [1-x, 1]\right\}.$$

Comme la fonction est continue sur le fermé borné grisé A, elle est donc intégrable sur A. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 \left(\int_{1-x}^1 \cos(x^2)\ dy\right)\ dx \\ &= \int_0^1 \cos(x^2)\ (1-(1-x))\ dx \\ &= \int_0^1 \cos(x^2)\ x\ dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 D\sin(x^2)\ dx \\ &= \frac{\sin(1)}{2}. \end{aligned}$$