LIÈGE université
Sciences

Mathématiques générales II (MATH0009)

Année académique 2021-2022

Corrigé de l'interrogation du 22 avril 2022

Version 21 mars 2022

QUESTIONNAIRE

Questions de théorie *Rédiger précisément et clairement vos réponses.*

1. (a) Donner la définition de la notion de matrice inverse d'une matrice carrée.
   (b) En vous servant de la définition du point (a), démontrer que la non-annulation du déterminant d'une matrice carrée est une condition nécessaire à l'existence d'une matrice inverse de celle-ci.

2. Soient A et S deux matrices carrées de même dimension. On suppose que S est inversible et que $S^{-1}AS$ est une matrice diagonale Δ. Démontrer que les éléments diagonaux de cette matrice Δ sont les valeurs propres de la matrice A.

Exercices *Rédiger précisément et clairement vos réponses.*

1. Dans un repère orthonormé, représenter sur des graphiques différents les ensembles décrits par les équations suivantes et préciser leur nom. Dans les cas (a) et (c), préciser l'excentricité, les coordonnées du (des) foyer(s) et l'équation des éventuelles asymptotes.

   (a) $9x^2 + 9 = y^2$ (b) $x^2y + y^3 = y$ (c) $1 - x = 4y^2$

2. Soit la matrice
$$A = \begin{pmatrix} \cos(1) & -\sin(1) \\ \sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix}.$$
   (a) Cette matrice est-elle inversible ? Pourquoi ?
   (b) Dans le cas où elle est inversible, en déterminer l'inverse et vérifier que votre réponse est correcte.
   (c) Déterminer les valeurs propres de A.

3. On donne les matrices
$$A = \begin{pmatrix} i^3 & \frac{1}{i} & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \textbf{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -i & 2 \end{pmatrix}.$$
   (a) Peut-on calculer AB^* ? Justifier. Si oui, que vaut ce produit ?
   (b) Sachant que -1 est une valeur propre de $\overline{A}$, démontrer que le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $\overline{A}$ de valeur propre -1.

4. Une étude relative à la présence au travail en hiver a montré que les salariés peuvent être en bonne santé (B) ou être enrhumés (R) ou être grippés (G) ; dans les deux premiers cas, ils sont présents au travail sinon ils restent chez eux. D'un jour à l'autre, on constate les évolutions suivantes :
   - étant en bonne santé, un salarié a 3 chances sur 5 de le rester le lendemain et 2 chances sur 5 de devenir enrhumé
   - étant enrhumé, il a 1 chance sur 4 de le rester le jour suivant, 1 chance sur 4 d'avoir la grippe mais aussi 1 chance sur 2 d'être guéri
   - enfin, étant grippé, il a 1 chance sur 2 de rester grippé et 1 chance sur 2 d'être en bonne santé.

   Déterminer la matrice de transition ainsi que la probabilité qu'à long terme un salarié ne soit pas présent au travail (on supposera la matrice de transition régulière).

CORRIGE

Questions de théorie

1. **(a) Donner la définition de la notion de matrice inverse d'une matrice carrée.**

   (b) En vous servant de la définition du point (a), démontrer que la non-annulation du déterminant d'une matrice carrée est une condition nécessaire à l'existence d'une matrice inverse de celle-ci.

   Solution. Voir cours (amphi et syllabus).

2. **Soient A et S deux matrices carrées de même dimension. On suppose que S est inversible et que $S^{-1}AS$ est une matrice diagonale Δ. Démontrer que les éléments diagonaux de cette matrice Δ sont les valeurs propres de la matrice A.**

   Solution. Voir cours (amphi et syllabus).

Exercices

1. **Dans un repère orthonormé, représenter sur des graphiques différents les ensembles décrits par les équations suivantes et préciser leur nom. Dans les cas (a) et (c), préciser l'excentricité, les coordonnées du (des) foyer(s) et l'équation des éventuelles asymptotes.**

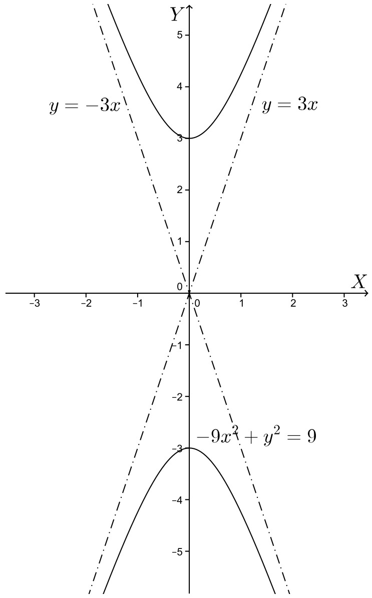
   (a) $9x^2 + 9 = y^2$ (b) $x^2y + y^3 = y$ (c) $1 - x = 4y^2$

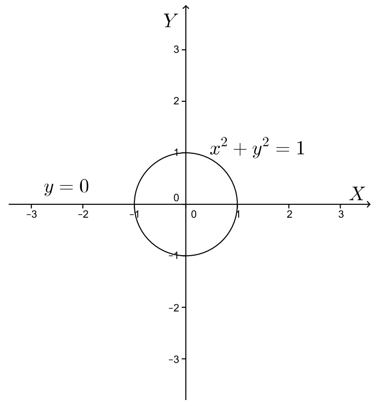
   Solution. Puisque $9x^2 + 9 = y^2 \Leftrightarrow -9x^2 + y^2 = 9 \Leftrightarrow -x^2 + y^2/3^2 = 1$, l'équation (a) est celle d'une hyperbole qui intersecte l'axe des ordonnées aux points de coordonnées $(0, -3)$ et $(0, 3)$. Ses asymptotes sont les droites d'équation $y = -3x$ et $y = 3x$. Dès lors, les foyers ont pour coordonnées $\left(0, -\sqrt{10}\right)$ et $\left(0, \sqrt{10}\right)$ et l'excentricité vaut $e = \sqrt{10}/3$.

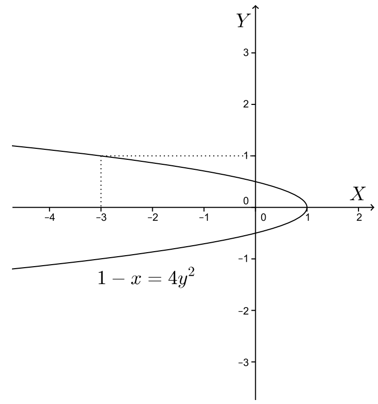
   Puisque $x^2y + y^3 = y \Leftrightarrow y = 0$ ou $x^2 + y^2 = 1$, l'équation (b) est celle de la droite d'équation cartésienne $y = 0$ (axe des abscisses) et celle du cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.

   L'équation (c) $1 - x = 4y^2$ est celle de la parabole dont le foyer a pour coordonnées $(15/16, 0)$ et son excentricité vaut $e = 1$. En effet, elle est la translation de vecteur $(1, 0)$ de la parabole d'équation $(-1/4)x = y^2$ dont le foyer a pour coordonnées $(-1/16, 0)$.

   Voici la représentation graphique de ces ensembles.







2. **Soit la matrice**
$$A = \begin{pmatrix} \cos(1) & -\sin(1) \\ \sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix}.$$
(a) Cette matrice est-elle inversible ? Pourquoi ?
(b) Dans le cas où elle est inversible, en déterminer l'inverse et vérifier que votre réponse est correcte.
(c) Déterminer les valeurs propres de A.
Solution. a) La matrice A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$. Comme on a $\det A = \cos^2(1) + \sin^2(1) = 1 \neq 0$, la matrice A est donc inversible.
b) La matrice des cofacteurs de A étant égale à
$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \cos(1) & -\sin(1) \\ \sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix},$$
l'inverse de A est la matrice
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(1) & \sin(1) \\ -\sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix}$$
et on a
$$\begin{aligned} A.A^{-1} &= \begin{pmatrix} \cos(1) & -\sin(1) \\ \sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(1) & \sin(1) \\ -\sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(1) + \sin^2(1) & \sin(1)\cos(1) - \sin(1)\cos(1) \\ \sin(1)\cos(1) - \sin(1)\cos(1) & \sin^2(1) + \cos^2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
c) Les valeurs propres de A sont les solutions de
$$\det \begin{pmatrix} \cos(1) - \lambda & -\sin(1) \\ \sin(1) & \cos(1) - \lambda \end{pmatrix} = (\cos(1) - \lambda)^2 + \sin^2(1) = \lambda^2 - 2\cos(1)\,\lambda + 1 = 0.$$
Comme $\Delta = 4\cos^2(1) - 4 = -4\sin^2(1) = (2i\sin(1))^2$, les valeurs propres de A sont $\cos(1) + i\sin(1)$ et $\cos(1) - i\sin(1)$.

3. **On donne les matrices**
$$A = \begin{pmatrix} i^3 & \frac{1}{i} & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \textbf{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -i & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Peut-on calculer AB^* ? Justifier. Si oui, que vaut ce produit ?

Solution. On peut calculer le produit AB^* car le nombre de colonnes (3) de A est égal au nombre de lignes de B^* ; le produit est une matrice de format 3×1.

Comme $i^3 = -i$ et $\dfrac{1}{i} = -i$, la matrice A peut s'écrire

$$A = \begin{pmatrix} -i & -i & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dès lors,

$$AB^* = \begin{pmatrix} -i & -i & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

(b) Sachant que -1 est une valeur propre de $\overline{A}$, démontrer que le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $\overline{A}$ de valeur propre -1.

Solution. La matrice conjuguée $\overline{A}$ est égale à

$$\begin{pmatrix} i & i & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si on note X le vecteur non nul donné, le produit $\overline{A}X$ vaut

$$\overline{A}X = \begin{pmatrix} i & i & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -X$$

ce qui prouve que X est bien un vecteur propre de $\overline{A}$ de valeur propre -1.

4. **Une étude relative à la présence au travail en hiver a montré que les salariés peuvent être en bonne santé (B) ou être enrhumés (R) ou être grippés (G) ; dans les deux premiers cas, ils sont présents au travail sinon ils restent chez eux. D'un jour à l'autre, on constate les évolutions suivantes :**

   - étant en bonne santé, un salarié a 3 chances sur 5 de le rester le lendemain et 2 chances sur 5 de devenir enrhumé

   - étant enrhumé, il a 1 chance sur 4 de le rester le jour suivant, 1 chance sur 4 d'avoir la grippe mais aussi 1 chance sur 2 d'être guéri

   - enfin, étant grippé, il a 1 chance sur 2 de rester grippé et 1 chance sur 2 d'être en bonne santé.

   Déterminer la matrice de transition ainsi que la probabilité qu'à long terme un salarié ne soit pas présent au travail (on supposera la matrice de transition régulière).

   Solution. Soient B_0, G_0 et R_0 respectivement l'état de santé fixé au départ et B_1, G_1 et R_1 respectivement le lendemain. On a donc

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ G_1 \\ R_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \\ 2/5 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ G_0 \\ R_0 \end{pmatrix}$$

   et la matrice de transition T est

$$T = \begin{pmatrix} 3/5 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \\ 2/5 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

La situation à long terme est donnée par le vecteur propre de probabilité de valeur propre 1. Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls X tels que

$$(T-\mathbb{1})X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2/5 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/4 \\ 2/5 & 0 & -3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -4x+5y+5z=0 \\ -2y+z=0 \\ 8x-15z=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=\frac{15}{4}y \\ z=2y \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{4}y \\ y \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont donc des vecteurs du type

$$c\begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

Comme $c(15+4+8)=1 \Leftrightarrow c=\frac{1}{27}$, le vecteur de probabilité est

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{9} \\ \frac{4}{27} \\ \frac{8}{27} \end{pmatrix}$$

et la probabilité qu'à long terme un salarié ne soit pas présent au travail est de $4/27$.