Faculté des Sciences

MATHEMATIQUES GENERALES II, F. Bastin
« MATH0009-6 »

$\boxed{\text{EXERCICES DE BASE}}$

Bachelier en Biologie et en Géographie (Bloc 2)

Année académique 2021-2022 Jacqueline CRASBORN

Introduction

Généralités

Ce fascicule fournit aux étudiants les listes d'exercices à résoudre lors des répétitions du cours de MATHEMATIQUES GENERALES II (MATH0009-06) de l'année académique 2021-2022. Il présente aussi la résolution complète d'exercices de base (listes 2002/2003) et les solutions des exercices des listes 2003/2004 et 2004/2005 couvrant la matière de ce cours s'adressant aux futurs bacheliers de deuxième bloc en biologie et en géographie.

Ce fascicule a été rédigé pour répondre à divers objectifs. Il veut fournir aux étudiants une référence correcte sur laquelle s'appuyer pour tenter de résoudre les exercices proposés au cours des répétitions.

La rédaction de ce fascicule a également pour but d'insister sur le vocabulaire spécifique, les symboles mathématiques à utiliser, la rigueur exigée dans la rédaction, les liens indispensables qui doivent figurer entre les différentes étapes d'un développement mathématique. Trop souvent, en corrigeant des interrogations par exemple, on peut lire une succession de notations, d'équations, de calculs écrits les uns à côté des autres sans la moindre indication relative à la logique du raisonnement. C'est cet écueil aussi qu'on voudrait éviter aux étudiants grâce à ce fascicule.

Une dernière intention, et non la moindre, est d'amener les étudiants à prendre en charge leur formation de la façon la plus active et la plus autonome possible.

Pour terminer, je m'en voudrais de ne pas exprimer mes plus vifs remerciements à Françoise Bastin pour l'accueil qu'elle a réservé à cette initiative, les conseils qu'elle m'a donnés, sa relecture attentive et la confiance qu'elle me témoigne dans mon travail avec les étudiants. Je remercie également tous les assistants avec lesquels je travaille, tout spécialement Christine Amory et Christophe Dozot, pour leurs suggestions constructives et leur participation à l'élaboration de ce fascicule.

Jacqueline Crasborn
Année académique 2021 - 2022

Informations relatives aux répétitions

Compétences à entraîner

Lors des répétitions, avec l'aide des assistants, il est attendu que les étudiants s'entraînent aux compétences suivantes :

1) **la communication (orale et écrite)**
   — structurée (contexte, justifications, conclusion ...),
   — précise (vocabulaire et symboles adéquats, reflet exact de la pensée ...) ;
2) **le sens critique** (l'exercice a-t-il un sens ? le résultat est-il plausible ? ...) ;
3) **le raisonnement logique et la compréhension** (et non l'application d'une technique de calcul sans réflexion, par imitation ...) ;
4) **l'autonomie**
   — dans la recherche de pistes ou d'idées par l'utilisation, dans un premier temps, de documents (syllabus du cours, fascicules intitulés "'Bases" et "Exercices de base" ...) et, éventuellement dans un second temps, par une demande d'aide auprès de personnes-ressources pour répondre aux questions ou difficultés rencontrées,

— dans l'organisation et la planification de son travail ;

5) **la maîtrise des connaissances de base des mathématiques comme outil pour les sciences.**

Consignes pour préparer une répétition

1. Répondre soigneusement aux questions de théorie de la première partie de chaque liste.
2. Il est vivement conseillé
   — de prendre connaissance des exercices à résoudre lors de la répétition future afin de détecter les difficultés qui pourraient être rencontrées lors de la résolution,
   — de dresser alors une liste de questions sur les difficultés rencontrées, questions à poser à l'assistant lors de la répétition

Déroulement des répétitions

1. Dans le cas de notions qui semblent souvent poser problème aux étudiants, l'assistant résout 1 ou 2 exercices “modèle” pour leur permettre de se familiariser avec les exercices ayant trait à ces matières ; il fait participer les étudiants à leur résolution. Ensuite, l'assistant fera une synthèse du processus de résolution en mentionnant les éléments de théorie utilisés.
2. Enfin, chaque étudiant résout, seul ou avec son voisin, les exercices proposés dans la liste en cherchant les informations nécessaires dans ses documents. S'il reste bloqué malgré tout, il appelle alors l'assistant qui l'aidera dans sa recherche.

Tous les exercices de la liste doivent être résolus si possible pour la répétition suivante ; la plupart des étudiants seront obligés d'achever à domicile. Dans ce cas, s'ils rencontrent certaines difficultés, ils peuvent toujours en parler lors de la répétition suivante ou envoyer un courriel à l'un des assistants.

Les solutions des exercices proposés pour les répétitions se trouvent en fin de ce fascicule.

Table des matières des répétitions pour 2021-2022

1. Coniques et nombres complexes.
2. Equations différentielles, approximations polynomiales et calcul intégral à une variable (révisions et compléments).
3. Calcul matriciel (1).
4. Calcul matriciel (2).
5. Calcul matriciel (3) et représentation d'ensembles.
6. Fonctions de plusieurs variables (1).
7. Fonctions de plusieurs variables (2).
8. Fonctions de plusieurs variables (3) et découplage d'un système d'équations différentielles

Il est possible que ce planning soit légèrement modifié en fonction de l'avancement du cours théorique. Toute modification sera mentionnée sur la page web du cours dont l'adresse suit

http ://www.afo.ulg.ac.be/fb/ens.html

Il est donc indispensable de la consulter régulièrement.

L'équipe des assistants
Année académique 2021 - 2022

AVERTISSEMENT

Les listes d'exercices résolus présentées dans ce fascicule sont celles des années académiques 2002/2003, 2003/2004 et 2004/2005. Elles ont été modifiées en fonction de la nouvelle version du cours de Mathématique de F. Bastin.

Les exercices des répétitions du cours Mathématiques générales II (MATH0009-06) pour l'année académique 2021-2022 se trouvent au chapitre 1. Ceux des années 2002/2003, 2003/2004 et 2004/2005 se trouvent dans les chapitres 2 à 4 inclus. Les solutions des exercices des répétitions se trouvent au chapitre 5.

Jacqueline Crasborn
Année académique 2021 - 2022

MATH0009
Biologistes et géographes B2

Année académique 2021-2022

Version 28 décembre 2021

Chapitre 1

Listes d'exercices

Liste 1 : coniques et nombres complexes

A préparer AVANT de venir à la répétition

I. Les coniques

1. Soit un repère orthonormé du plan.
   a) Donner l'équation canonique du cercle centré au point de coordonnées (x_1, y_1) et de rayon R.
   b) Que devient cette équation si le cercle est centré à l'origine ?
   c) Quelle caractéristique commune ces équations ont-elles permettant de les différencier des équations d'autres coniques ?
   d) Donner l'équation canonique d'une ellipse.
   e) Comment, à la lecture de cette équation et de celles qui précèdent, peut-on immédiatement différencier celle d'un cercle de celle d'une ellipse ?
   f) Donner l'équation canonique d'une hyperbole.
   g) Comment, à la lecture de cette équation et de celle d'une ellipse, peut-on immédiatement les différencier ?
   h) Donner l'équation canonique d'une parabole.
   i) Comment, à la lecture de cette équation et de celles ci-dessus, peut-on immédiatement repérer que c'est celle d'une parabole ?
2. a) Si on considère l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, donner les coordonnées de ses foyers, de ses points d'intersection avec les axes et la valeur de son excentricité.
   b) Si on considère l'hyperbole d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, donner les coordonnées de ses foyers, de ses points d'intersection avec les axes, les équations cartésiennes de ses asymptotes et la valeur de son excentricité.
   c) Si on considère la parabole d'équation $y^2 = 2px$, donner les coordonnées de son foyer, de son point d'intersection avec l'axe des abscisses et la valeur de son excentricité.

II. Les nombres complexes

1. Définir un nombre complexe puis en donner sa notation pratique.
2. Définir $\left.\begin{array}{l}\text{a) les parties réelle et imaginaire}\\ \text{b) le conjugué}\\ \text{c) le module}\end{array}\right\}$ d'un nombre complexe.
3. Dans le plan complexe,
   a) quelle est l'interprétation graphique du module d'un nombre complexe ?
   b) que dire de la représentation d'un nombre complexe et de son conjugué ?

4. Que peut-on dire des puissances naturelles de i ?
5. Si z est un nombre complexe non nul, comment rendre réel le dénominateur de $\frac{1}{z}$?
6. Si $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$, en donner la forme trigonométrique.
   Quel lien peut-on faire avec les coordonnées polaires ?
7. Quelles différences y a-t-il entre la résolution et les solutions d'une équation du second degré dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$?

Préambule

Un cône circulaire droit à deux nappes (« diabolo ») peut être engendré par la rotation d'une droite sécante à une autre autour de cette autre prise comme axe de la rotation. Les coniques (ou sections coniques) peuvent être obtenues par l'intersection d'un tel cône par un plan. Selon la position de celui-ci, on obtient un cercle, une ellipse, une parabole ou une hyperbole.

La trajectoire d'un corps céleste en orbite autour d'une étoile ou d'une autre planète (la Terre autour du Soleil, par exemple) est une ellipse dont l'étoile ou la planète occupe l'un des foyers. De nombreuses comètes ont des orbites elliptiques dont l'excentricité est proche de 1 mais certaines comètes peuvent avoir des trajectoires hyperboliques ou paraboliques.

En effectuant une rotation d'une ellipse autour de son axe focal, on engendre un ellipsoïde de révolution qui jouit de la propriété de réflexion suivante : toute onde émise à partir d'un des foyers est réfléchie par l'ellipsoïde vers le second foyer. La Rotonde du Capitole à Washington est une galerie à écho de ce type à plafond elliptique : toute personne qui chuchote en l'un des foyers peut être entendue par une personne placée à l'autre foyer. Cette propriété de réflexion est également utilisée en médecine pour désintégrer des calculs rénaux au moyen d'ondes de haute densité. Le médecin positionne le patient de telle sorte que le calcul se trouve en l'un des foyers et l'émetteur des ondes réfléchies par l'ellipsoïde en l'autre foyer.

La trajectoire d'un électron qui, sans interaction, passerait en ligne droite tout près d'un ion négatif au repos, est en fait une trajectoire hyperbolique à cause de la force de répulsion.
Si des ondes circulaires émises par deux sources oscillant en phase interfèrent, les points où l'amplitude est maximale ou minimale sont situés sur des hyperboles dont les sources sont les foyers.

La trajectoire décrite par un objet (ballon, saut d'un animal ...) lancé et soumis à la pesanteur est une parabole.
En effectuant une rotation d'une parabole autour de son axe de symétrie, on obtient un paraboloïde de révolution qui, grâce à la propriété optique des paraboles, permet de concentrer des ondes ou des rayons en un point (antenne parabolique, four solaire, miroir de télescope ...) ou de diffuser sous forme d'un faisceau cylindrique de la lumière produite par une ampoule située au foyer (lampe de poche, phare ...).

A propos de cette liste

Cette liste d'exercices est assez détaillée : elle reprend non seulement les énoncés à résoudre lors de la séance, mais elle donne aussi des indications quant à la démarche à suivre et aux « questions à se poser » lors de la confrontation à la résolution.

Exercices de base

Lors de la répétition, les exercices I. 2(e, f et g : équations (2) et (6)) seront résolus par l'assistant ainsi que les exercices II.1(4), II.3(4) et II.4(2)

I. Les coniques

1. Dans un repère orthonormé, on considère les équations cartésiennes suivantes

$$(1)\ \frac{x^2}{4} - y^2 = 4 \qquad (2)\ x = y^2 + 2 \qquad (3)\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 4 \qquad (4)\ x^2 + y^2 + y = 0$$

$$(5)\ x^2 = -y^2 \qquad (6)\ \frac{y^2}{4} - x^2 = 4 \qquad (7)\ y = xy^2 \qquad (8)\ \frac{y^2}{4} + x^2 = 4$$

Sans faire aucun calcul, quelles sont celles qui pourraient être l'équation cartésienne
a) d'un cercle ? b) d'une ellipse ? c) d'une hyperbole ? d) d'une parabole ?

2. a) Ecrire $y^2 + y$ sous la forme d'un carré parfait auquel on ajoute (ou on soustrait) une constante.
b) Déterminer les coordonnées du centre et la valeur du rayon du cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + y = 0$. Le représenter graphiquement.
c) Pour chacune des ellipses repérées à l'exercice précédent, déterminer les coordonnées de leurs points d'intersection avec les axes. Les représenter graphiquement.
d) Donner les coordonnées des foyers et la valeur de l'excentricité des ellipses représentées ci-dessus.
e) Donner les coordonnées des foyers, des points d'intersection avec les axes, les équations cartésiennes des asymptotes et la valeur de l'excentricité des hyperboles repérées dans l'exercice ci-dessus.
f) Représenter graphiquement ces hyperboles et leurs asymptotes.
g) Donner les coordonnées du foyer et la valeur de l'excentricité des éventuelles paraboles repérées à l'exercice précédent et les représenter graphiquement.
h) Si, dans l'exercice précédent, il reste des équations de courbes non encore représentées, les analyser afin d'en donner aussi une représentation graphique.

II. Les nombres complexes

1. Déterminer les partie réelle, imaginaire, le conjugué et le module de chacun des complexes ci-dessous. Représenter ces complexes dans le plan muni d'un repère orthonormé (« X = axe réel » et « Y= axe imaginaire »)

$$i + 1, \quad (-i + 1)(-1 - 2i), \quad \frac{1}{-i + 1}, \quad \frac{i^7}{i - 1}, \quad (1 - i)^2$$

2. Déterminer la forme trigonométrique des complexes suivants et les représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé (« X = axe réel » et « Y= axe imaginaire »)

$$-i, \quad i + 1, \quad \frac{1}{2}(\sqrt{3} - i).$$

3. On suppose que α est un nombre réel. Déterminer les partie réelle, imaginaire, le conjugué et le module de chacun des complexes ci-dessous. Représenter ces complexes dans le plan muni d'un repère orthonormé (« X = axe réel » et « Y= axe imaginaire ») en supposant que α appartient à l'intervalle $[\frac{\pi}{2}, \pi[$

$$\cos(\alpha) - i\sin(\alpha), \quad \frac{1}{\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)}, \quad (\cos(1) + i\sin(1))(\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)), \quad \sin(2\alpha) - i\cos(2\alpha).$$

4. Résoudre les équations suivantes et représenter les solutions dans le plan muni d'un repère orthonormé (« X = axe réel » et « Y= axe imaginaire »)

$(1)\ z^2 + 8 = 0 \quad (2)\ 27z^3 + 1 = 0 \quad (3)\ z^2 + 2 = iz \quad (4)\ z^2 - z + 1 + i = 0 \quad (5)\ z^2 - (1 - 2i)z = 1 + i$

Liste 2 :

Équations différentielles, approximations polynomiales et calcul intégral à une variable

A préparer AVANT de venir à la répétition

I. Equations différentielles

1. Définir une EDLCC [1] d'ordre 1.
2. Donner l'équation homogène associée à cette équation.
3. Donner l'équation caractéristique associée à cette équation homogène.
4. Donner l'ensemble des fonctions solutions de l'équation homogène.
5. De combien de constantes arbitraires les solutions dépendent-elles ?
6. Répondre aux mêmes questions pour une EDLCC d'ordre 2.
7. Quelle est la forme générale de toute solution d'une EDLCC ?
8. a) Qu'appelle-t-on « méthode des exponentielles polynômes » ?
   b) Comment détermine-t-on une solution particulière dans ce cas pour une équation d'ordre 1 (resp. d'ordre 2) ?
   c) Si le second membre ne s'écrit pas sous la forme d'un produit d'une exponentielle par un polynôme, mais n'est, par exemple, qu'un polynôme ou un cosinus ou ... comment peut-on envisager d'utiliser quand même cette méthode ?
9. a) Qu'appelle-t-on « méthode de variation des constantes » ?
   b) Comment détermine-t-on une solution particulière dans ce cas pour une équation d'ordre 1 (resp. d'ordre 2) ?
10. Quel est le processus à suivre pour résoudre une EDLCC ?

II. Approximations polynomiales

1. Qu'appelle-t-on approximation polynomiale d'une fonction en un point de son domaine de définition ?
2. Quelle forme cette approximation a-t-elle quand la fonction est suffisamment dérivable ?
3. (a) Enoncer le résultat appelé « Développement limité de Taylor ».
   (b) Relier ce résultat aux notions d'approximation polynomiale et de reste de l'approximation polynomiale d'une fonction en un point.

III. Calcul intégral à une variable

A. Calcul d'intégrales sur un ensemble borné fermé

1. Donner une condition suffisante pour qu'une fonction soit intégrable sur un intervalle borné fermé de $\mathbb{R}$.
2. Comment les primitives permettent-elles de calculer une intégrale ?
3. Citer l'énoncé du théorème d'intégration par variation de primitives
4. Soit un réel x pour lequel $\tan(x/2)$ existe. Déterminer l'expression de $\sin(x)$ et de $\cos(x)$ en fonction de $\tan(x/2)$

B. Calcul d'aires

Quelle est l'interprétation graphique de l'intégrale d'une fonction continue positive (resp. négative) sur un intervalle borné fermé de $\mathbb{R}$?

1. abréviation pour « équation différentielle linéaire à coefficients constants »

C. Calcul d'intégrales sur un ensemble non borné fermé

1. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b[$ de $\mathbb{R}$, $a,b\in\mathbb{R}$ (ou $b=+\infty$).
   (a) Donner la définition de l'intégrabilité de f sur $[a,b[$.
   (b) Que devient-elle si f est positive (resp. négative) sur $[a,b[$?
   (c) Donner la définition de l'intégrale de f sur $[a,b[$ si f y est intégrable.
2. Soit $s\in\mathbb{R}$. Quand la fontion f définie par $f(x)=1/x^s$ est-elle intégrable sur $]0,1]$ (resp. sur $[1,+\infty[$) ?
3. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b[$, $a,b\in\mathbb{R}$ (ou $b=+\infty$).
   (a) Citer le(s) critère(s) d'intégrabilité pouvant être utilisé(s) pour prouver l'intégrabilité de f sur $[a,b[$
   — lorsque $b\in\mathbb{R}$
   — lorsque $b=+\infty$
   (b) Citer le(s) critère(s) pouvant être utilisé(s) pour prouver la **non** intégrabilité de f sur $[a,b[$
   — lorsque $b\in\mathbb{R}$
   — lorsque $b=+\infty$
4. Quels sont les principales techniques d'intégration ?
   Citer l'énoncé du théorème d'intégration
   (a) par parties.
   (b) par changement de variables.

Exercices de base

Lors de la répétition, les exercices suivants seront résolus par l'assistant :
I. Equations différentielles : B. ex 2(1 et 10)
II. Approximations polynomiales : ex 2
III. Calcul intégral à une variable : A. ex 2 (7) et ex 4, B. ex 1, C. ex 1 (3, 7, 9)

I. Equations différentielles

A. Quelques manipulations

1. Si l'équation différentielle $(D_ty)^2=2y$ admet 2 solutions distinctes non nulles, peut-on affirmer qu'une combinaison linéaire de ces solutions est encore solution de cette équation ?
2. Montrer que la fonction $g(t)=3t^2-6t+2,\ t\in\mathbb{R}$, vérifie le système $\begin{cases}(D_ty)^2=12(y+1)\\ y(0)=2\\ y(2)=2\end{cases}$
3. Montrer que [2] la fonction $g(t)=\operatorname{cotan}(t)-\dfrac{1}{\sin(t)},\ t\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, vérifie l'équation $2\dfrac{dy}{dt}+y^2=-1$.
4. Montrer que la fonction $u:x\mapsto C_1\,e^{C_2x},\ x\in\mathbb{R}$, C_1 et C_2 étant des constantes complexes arbitraires, vérifie l'équation différentielle $v(x)D^2v(x)-(Dv(x))^2=0$.
5. Montrer que la fonction $x\mapsto\tan(x)+\dfrac{1}{\cos(x)},\ x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, vérifie l'équation différentielle
$$2Df-f^2=1.$$

2. Les dérivées première et seconde de $f(x),\ x\in I$ s'écrivent parfois $\frac{df}{dx},\ \frac{d^2f}{dx^2}$

B. Equations différentielles, résolutions

1. Résoudre les équations différentielles suivantes, en spécifiant dans quel intervalle on travaille

$$1)\ 4Df+2if=0 \qquad 2) D^2f=2f \qquad 3) D^2f=0$$

$$4)\ D^2f+Df-2f=0 \qquad 5)\ 4D^2f-f=0 \qquad 6)\ D^2f+f=0$$

2. Résoudre les équations différentielles suivantes, en spécifiant dans quel intervalle on travaille (pour l'équation 5, en donner aussi les solutions réelles)

1) $Df(x)-f(x)=\dfrac{1}{1-e^x}$ 2) $Df(x)-2f(x)=\dfrac{1}{1-e^{-x}}$

3) $D^2f(x)+Df(x)-2f(x)=e^x+4x^2e^{2x}+1$ 4) $4D^2f(x)-f(x)=\cos^2(x)-\frac{1}{2}$

5) $D^2f(x)+f(x)=x\,e^{2x}$ 6) $D^2f(x)+2Df(x)+f(x)=(2+\cos(x))e^{-x}$

7) $D^2f(x)-f(x)=1+x^2$, 8) $9D^2f(x)-Df(x)=1$

9) $D^2f(x)-4f(x)=1+e^{2x}$, 10) $D^2f(x)+4f(x)=\sin(4x)$

3. Résoudre le système suivant, en spécifiant dans quel intervalle on travaille

$$\begin{cases} 4D^2f(x)+f(x)=x^2+x+2 \\ f(0)=0 \\ Df(0)=2 \end{cases}$$

4. Résoudre l'équation différentielle suivante en précisant l'intervalle sur lequel on travaille.

$$2D^2f(x)+Df(x)=2x$$

Déterminer ensuite la solution qui vaut 1 en 1 et dont la dérivée première vaut 0 en 1.

C. Divers

1. Dans certaines conditions, la température de surface $y(t)$ d'un objet change au cours du temps selon un « taux » proportionnel à la différence entre la température de l'objet et celle du milieu ambiant, que l'on suppose constante et que l'on note y_0. On obtient ainsi l'équation différentielle

$$Dy(t)=k(y(t)-y_0)$$

où k est une constante strictement négative. Cette équation est appelée « Newton's law of cooling » et elle est utilisée notamment pour déterminer le temps entre la mort d'un individu et la découverte de son corps.

Résoudre cette équation et montrer alors que la température de l'objet se rapproche de la température ambiante au fur et à mesure que le temps passe.

2. Depuis un recensement de la population d'un pays, on constate que la vitesse d'accroissement de la population est, à tout instant, proportionnelle au nombre d'habitants à cet instant. Après combien de temps depuis ce recensement, cette population sera-t-elle triple sachant qu'elle a doublé en 50 ans ?

3. La vitesse initiale d'une balle roulant sur un sol horizontal est de 10 m/s. Vu les frottements, la vitesse décroît avec un taux constant de 2 m/s^2. Quand la balle sera arrêtée, quelle distance aura-t-elle parcourue depuis son point de départ ?

4. Déterminer la valeur de la constante c de telle sorte que la fonction $f(x)=3x^2,\ x\in\mathbb{R}$ soit une solution de l'équation différentielle

$$c\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+x\frac{dy}{dx}-y=0$$

5. Soit L la longueur d'un pendule et soit T sa période d'oscillation. Si les oscillations sont petites et si le pendule n'est soumis à aucune force autre que la gravité, alors un modèle liant T et L est l'équation différentielle
$$\frac{dT}{dL} = \frac{T}{2L}.$$
Montrer que cela implique que la période T est proportionnelle à la racine carrée de la longueur L.

II. Approximations polynomiales

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre n en x_0 pour la fonction f_k. Représenter f_2 (—-ou f_3 ou f_5—) et ses approximations. Pour f_5,
a) donner une expression explicite du reste de ces approximations.
b) indiquer où se situe le graphique de f_5 au voisinage de 0 par rapport à celui de chacune des approximations en tenant compte du point précédent.

$f_1(x) = \cos(x)\, e^{3x},\ x_0 = 0, n = 0, 1, 2, 3$ $\quad$ $f_2(x) = \sqrt{1 + 9x},\ x_0 = 0, n = 0, 1, 2$

$f_3(x) = \dfrac{1}{1 - 2x},\ x_0 = 0, n = 0, 1, 2$ $\quad$ $f_4(x) = \arctan(x),\ x_0 = 0$ (resp. $x_0 = 1$), $n = 0, 1, 2$

$f_5(x) = \cos^2(x),\ x_0 = 0,\ n = 0, 1, 2$ $\quad$ $f_6(x) = \sin(x),\ x_0 = 1, n = 0, 1, 2$

2. Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 3 en 0 de la fonction cos et en estimer le reste. Représenter la fonction et cette approximation dans le même repère orthonormé.
3. Un professeur de mathématique lance un défi à ses élèves. Le premier qui donnera une approximation du nombre e avec les 3 premières décimales exactes et pourra expliquer sa méthode aux autres sera dispensé de la prochaine interrogation. Pour relever le défi, les élèves, restés en classe, n'ont droit qu'à une feuille et un crayon. Ils sont sans accès à internet et ne peuvent utiliser ni gsm, ni calculatrice ...
Comment peuvent-ils procéder ?

III. Calcul intégral à une variable

A. Calcul d'intégrales sur un ensemble borné fermé

1. Soit $a > 0$. Démontrer et interpréter graphiquement que
(a) si f est une fonction continue et paire sur $[-a, a]$, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$
(b) si f est une fonction continue et impaire sur $[-a, a]$, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$
2. Calculer les intégrales suivantes (si c'est possible)

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{1} (x^2 + 2x)\, dx$ $\quad$ (2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} xe^x\, dx$ $\quad$ (3) $\displaystyle\int_{-1}^{0} xe^{-x^2}\, dx$

(4) $\displaystyle\int_{1/2}^{3} \sqrt{3 + \frac{x}{2}}\, dx$ $\quad$ (5) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin^2(x)\, dx$ $\quad$ (6) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{cotan}^2(x)\, dx$

(7) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} x\sin^2(x)\, dx$ $\quad$ (8) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \cos(x)\sin^2(x)\, dx$ $\quad$ (9) $\displaystyle\int_{-1}^{4} \frac{x + 1}{x + 2}\, dx$

(10) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \arctan(x)\, dx$ $\quad$ (11) $\displaystyle\int_{-2}^{2\sqrt{3}} \frac{1}{4 + x^2}\, dx$ $\quad$ (12) $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}\, dx$

3. a) Si a est un paramètre réel fixé dans $]0, \frac{\pi}{2}]$, la fonction $f_1 : x \mapsto x^2 \sin(ax)$ est-elle intégrable sur $[0,1]$? Si oui, que vaut son intégrale ?

   b) Si $a > 0$ est un réel fixé, la fonction $f_2 : x \mapsto \frac{a\ e^{-a^2}}{a^2+x}$ est-elle intégrable sur $[0, a^2]$? Si oui, que vaut son intégrale ?

   c) Si $a > 0$ est un réel fixé, la fonction $f_3 : x \mapsto \frac{\sqrt{a}}{x^2+a^2}$ est-elle intégrable sur $[a, +\infty[$? Si oui, que vaut son intégrale ?

4. En cartographie, sur une carte de Mercator, l'ordonnée d'un point proche de l'équateur et dont la latitude est $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, est donnée par

$$y(\varphi) = R \int_0^{\varphi} \frac{1}{\cos(u)} du.$$

   Montrer que

$$y(\varphi) = R\ \ln\left(\left|\tan\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|\right).$$

B. Calcul d'aires

1. Calculer l'aire de la partie du plan dont une description analytique est la suivante

$$\left\{(x,y) : x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right], y \in \mathbb{R} \text{ et } \cos(x) \leq y \leq \sin(2x)\right\}.$$

   Donner aussi une représentation graphique de cet ensemble.

2. Calculer l'aire de la partie du plan dont une description analytique est la suivante

$$\{(x,y) : x \in [-2,1],\ y \in [x-1, 1-x^2]\}.$$

   Donner aussi une représentation graphique de cet ensemble.

3. On considère l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 2x,\ y \geq x^2\}$. Donner une représentation graphique de cet ensemble en le hachurant et calculer l'aire de cette région du plan.

C. Calcul d'intégrales sur un ensemble non borné fermé

1. Calculer les intégrales suivantes (si c'est possible)

(1) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\ dx$	(2) $\displaystyle\int_{-1}^0 \ln(x^2)\ dx$
(3) $\displaystyle\int_{-1}^e x\ln(\lvert x\rvert)\ dx$	(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{9x^2+4}\ dx$
(5) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{9x^2-4}\ dx$	(6) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-2x+1}\ dx$
(7) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+5}\ dx$	(8) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^2+2x-3}\ dx$
(9) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\pi/3} \cos(2x)\ e^x\ dx$	(10) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\ e^{2x}\ dx$
(11) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\ dx$	(12) $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{1}{x^2-4}\ dx$

Liste 3 : calcul matriciel (1)

A préparer AVANT de venir à la répétition

1. Qu'appelle-t-on une matrice ?
2. Qu'appelle-t-on le type (ou le format) et la dimension d'une matrice ?
3. Etant donné une matrice A, définir
   (a) sa matrice conjuguée,
   (b) sa matrice transposée,
   (c) sa matrice adjointe.
4. Définir les opérations suivantes et en donner les propriétés :
   (a) addition de deux matrices du même type,
   (b) multiplication d'une matrice par un nombre complexe,
   (c) multiplication de deux matrices.
5. Qu'appelle-t-on le déterminant d'une matrice ? Peut-on toujours le définir ?
6. Citer les propriétés liées aux déterminants.
7. Qu'appelle-t-on matrice inverse d'une matrice carrée donnée ?
8. Quelle est la forme explicite de cette matrice ?
9. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice inverse d'une matrice carrée donnée existe.

Exercices de base

Lors de la répétition, les exercices I. ex 1(2-7), II. ex 1(A - C) et III. (D) seront résolus par l'assistant.

I. Opérations entre matrices

1. Soient les matrices A, B, C données par

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & i \\ 1+i & -1 \\ \frac{3}{i} & (2-i)^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ i & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{i+1} \\ -2i & \frac{i}{2} \end{pmatrix}.$$

Si possible, effectuer les opérations suivantes (et simplifier la réponse au maximum). Si cela ne l'est pas, en expliquer la raison.

$$1)\ A+B,\ 2)\ A+\widetilde{B},\ 3)\ A.B,\ 4)\ A.B+C,\ 5)\ B.A,\ 6)\ C.\widetilde{A},\ 7)\ A^*.C,\ 8)\ i.C,\ 9)\ (i.A)^*.$$

2. Soit A une matrice carrée de dimension 3 telle que $A_{ij} = 1$, $\forall i,j$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $C = AB - BA$ et en déduire la forme de $\widetilde{C} + C$.

3. On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 - 2A + 3\,\mathbb{1} = 0$.

4. Déterminer la forme générale des matrices qui commutent avec $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

II. Déterminants

1. Calculer le plus rapidement possible le déterminant de chacune des matrices suivantes.

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2-i & 3i \\ -1 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ (i+1)^2 & 5 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -6 \end{pmatrix}\ D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Le déterminant de chacune des matrices suivantes est un polynôme en $x \in \mathbb{C}$. Factoriser ce polynôme en un produit de facteurs du premier degré.

$$A = \begin{pmatrix} 1-x & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2-x \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} i & x+2 \\ -x & -i \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} x & -4 \\ 1 & x \end{pmatrix}.\ D = \begin{pmatrix} x & 0 & 3 \\ 0 & x+1 & x \\ 1 & 0 & x-2 \end{pmatrix}.$$

III. Inversion de matrices

Calculer (si elle existe) la matrice inverse de chacune des matrices suivantes (on donne $\alpha \in \mathbb{R}$).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \end{pmatrix},\quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Liste 4 : calcul matriciel (2)

A préparer AVANT de venir à la répétition

1. Etant donné une matrice carrée A,
   (a) qu'appelle-t-on valeur propre de A ?
   (b) qu'appelle-t-on vecteur propre de A ?
2. En pratique, comment détermine-t-on les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice carrée.
3. Qu'appelle-t-on matrice diagonale ?
4. Qu'appelle-t-on matrice diagonalisable ?
5. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit diagonalisable.

Exercices de base

Lors de la répétition, les exercices I. ex 2(C), II. ex 1 et ex 2 seront résolus par l'assistant.

I. Diagonalisation

1. Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes et en donner la multiplicité.

$$A=\begin{pmatrix} i & -i \\ i & i \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Pourquoi ? Si elles le sont, en déterminer une forme diagonale Δ, ainsi qu'une matrice inversible S qui y conduit.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Calculer les produits AS et $S\Delta$. Comparer les matrices obtenues. N'aurait-on pas pu prévoir ce resultat sans effectuer les calculs ? Pourquoi ?

3. Une matrice carrée A de dimension 2 possède les deux valeurs propres 1 et -1, auxquelles peuvent être associés respectivement les vecteurs propres $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Que vaut A ?

II. Divers

1. En algèbre linéaire (ou géométrie analytique), une rotation du plan (d'angle θ) est représentée par une matrice du type

$$M_\theta=\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

   où θ est un réel (et représente la mesure de l'angle de la rotation).

— Pour tout θ, déterminer la matrice produit M_θ^2 et en simplifier les éléments au maximum.
— Montrer que quels que soient θ, θ', les matrices M_θ et $M_{\theta'}$ commutent. Qu'est-ce que cela signifie en termes de rotations ?
— Montrer que quel que soit le réel θ, la matrice $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

est aussi une matrice qui représente une rotation.

2. Vrai ou faux (Justifier)
   (a) Toute matrice carrée de dimension 3 commute avec $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (b) La matrice $\begin{pmatrix} a-b & a^2-ab+b^2 \\ a^2-b^2 & a^3-b^3 \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{C})$ est inversible.
   (c) Si une matrice carrée A de dimension 2 est de déterminant nul, alors l'une des colonnes de A est multiple de l'autre.
   (d) Si deux lignes d'une matrice carrée A de dimension 3 sont identiques, alors $\det A = 0$.
   (e) Si A est une matrice carrée de dimension 3, alors $\det(5A) = 5 \det A$.
   (f) Si B est la matrice obtenue en multipliant la ligne 3 d'une matrice carrée A de dimension 3 par 5, alors $\det B = 5 \det A$.
   (g) Si X est un vecteur propre de la matrice $2A$ alors c'est aussi un vecteur propre de A.
   (h) Si λ est une valeur propre de A alors λ^2 est valeur propre de A^2.
   (i) 0 peut être valeur propre d'une matrice inversible.
   (j) Si A est inversible, tout vecteur propre de A est aussi vecteur propre de son inverse.
   (k) Le carré d'une matrice est une matrice qui possède au moins un élément non nul.
   (l) Si A est diagonalisable, alors sa transposée l'est aussi.
   (m) Si A est diagonalisable et inversible, alors l'inverse est aussi diagonalisable.
   (n) Si A est diagonalisable, alors A^2 l'est aussi.
   (o) Les valeurs propres de l'inverse d'une matrice inversible sont les inverses des valeurs propres de la matrice.
   (p) La somme de deux matrices diagonalisables est toujours une matrice diagonalisable.

3. La cryptographie, pour beaucoup de monde, est un moyen de maintenir des communications privées. En effet, la protection des communications sensibles a été l'objectif principal de la cryptographie dans la grande partie de son histoire. Le *chiffrage* est la transformation des données dans une forme illisible. Son but est d'assurer la sécurité en maintenant l'information cachée aux gens à qui l'information n'est pas adressée, même ceux qui peuvent voir les données chiffrées. Le *déchiffrage* est l'inverse du chiffrage ; c'est la transformation des données chiffrées dans une forme intelligible.
   Aujourd'hui, les gouvernements emploient des méthodes sophistiquées de codage et de décodage des messages. Un type de code, qui est extrêmement difficile à déchiffrer, se sert d'une grande matrice pour coder un message. Le récepteur du message le décode en employant l'inverse de la matrice. Voici un exemple de codage/décodage d'un message par ce procédé.
   Considérons le message

   SUIS EN DANGER

   ainsi que la matrice de codage

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = C.$$

   Pour le codage, on assigne à chaque lettre de l'alphabet un nombre, à savoir simplement sa position dans l'alphabet, c'est-à-dire A correspond à 1, B correspond à 2, . . . , Z correspond à 26. En outre, on assigne le nombre 27 à un espace. Ainsi, le message devient :

S	U	I	S	*	E	N	*	D	A	N	G	E	R
19	21	9	19	27	5	14	27	4	1	14	7	5	18.

Puisqu'on emploie une matrice 2×2, on décompose la forme numérique de ce message en une suite de vecteurs [3] 1×2 :

$$(19 \quad 21),\ (9 \quad 19),\ (27 \quad 5),\ (14 \quad 27),\ (4 \quad 1),\ (14 \quad 7),\ (5 \quad 18).$$

On code alors le message en multipliant chacun de ces vecteurs par la matrice de codage C, ce qui peut être fait en définissant une matrice dont les lignes sont ces vecteurs et en multipliant cette dernière par C, ce qui nous donne :

$$\begin{pmatrix} 19 & 21 \\ 9 & 19 \\ 27 & 5 \\ 14 & 27 \\ 4 & 1 \\ 14 & 7 \\ 5 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 25 \\ -10 & 39 \\ 22 & -39 \\ -13 & 53 \\ 3 & -5 \\ 7 & -7 \\ -13 & 44 \end{pmatrix}$$

Dès lors, le message crypté est donné par les lignes de cette dernière matrice que l'on place bout à bout pour la transmission :

$$-2,\ 25,\ -10,\ 39,\ 22,\ -39,\ -13,\ 53,\ 3,\ -5,\ 7,\ -7,\ -13,\ 44.$$

Enfin, pour décoder le message, le récepteur a recours à la même technique que celle employée pour le codage mais en utilisant l'inverse de la matrice de codage, qui est donnée ici par

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il doit donc calculer le produit

$$\begin{pmatrix} -2 & 25 \\ -10 & 39 \\ 22 & -39 \\ -13 & 53 \\ 3 & -5 \\ 7 & -7 \\ -13 & 44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 21 \\ 9 & 19 \\ 27 & 5 \\ 14 & 27 \\ 4 & 1 \\ 14 & 7 \\ 5 & 18 \end{pmatrix}$$

et il retrouve bien la matrice correspondant au message de départ, ce qui lui permet de lire le message :

19	21	9	19	27	5	14	27	4	1	14	7	5	18
S	U	I	S	*	E	N	*	D	A	N	G	E	R.

Le Gouvernement a réussi à intercepter le message crypté suivant, provenant de l'ennemi public n°1 et destiné à l'ennemi public n°2 :

$$-18,\ -21,\ -31,\ 53,\ 48,\ 61,\ 3,\ -15,\ -21,\ -34,\ -30,\ -43,\ 45,\ 42,\ 48.$$

L'un de ses meilleurs espions infiltrés, James Bond, a découvert que la matrice utilisée par l'ennemi pour coder ce message est la suivante :

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Malheureusement, il n'y connaît rien en calcul matriciel et personne ne peut déchiffrer ce message... Votre mission est de décoder ce message dans les plus brefs délais.

3. Dans le cas où il faut compléter le dernier vecteur, il suffit d'y placer des ≪ 27 ≫, ce qui revient à compléter le message par des espaces pour avoir un nombre de caractères qui soit multiple de la dimension de la matrice de codage.

Liste 5 : calcul matriciel (3) et représentation d'ensembles

A préparer AVANT de venir à la répétition

I. Matrices de Leslie et matrices stochastiques

Etant donné une matrice carrée A,

1. qu'appelle-t-on matrice de Leslie, matrice de Leslie régulière ?
2. qu'appelle-t-on matrice stochastique, matrice stochastique régulière ?
3. qu'appelle-t-on vecteur de probabilité ?

Exercices de base

Lors de la répétition, les exercices I. ex 1 et ex 2, II. ex 2, ex 5 et ex 9 A seront résolus par l'assistant.

I. Matrices de Leslie et matrices stochastiques

1. Un chef d'entreprise gère un portefeuille d'actions par cycle de trois ans. Chaque action lui fait gagner tellement qu'il peut en acheter 6 fois plus au cours de la deuxième année et dix fois plus au cours de la troisième année pour chaque action placée.
   En parallèle, après un an il revend la moitié des actions pour investir dans son entreprise et après 2 ans, il ne conserve que 40 % des actions restantes et revend les autres pour la même raison.

   (a) Ecrire le système d'équations modélisant l'évolution de cette répartition des actions selon leur durée de placement (un an, deux ans, trois ans) en indiquant quelle est la matrice de Leslie de celle-ci.
   (b) Comment va évoluer la composition du portefeuille ?
   (c) Quelle est la répartition idéale qui permet de doubler chaque nombre d'actions de chaque type sur un an ?
2. L'institut météorologique a fait les observations suivantes :
   — on n'a jamais vu deux jours ensoleillés consécutifs,
   — s'il fait beau un jour donné, on a une chance égale d'avoir de la pluie ou de la neige le lendemain,
   — s'il pleut ou s'il neige, on a une chance sur deux que le temps se maintienne le jour suivant et une chance sur quatre qu'il fasse beau le lendemain.
   Sachant cela,
   (a) Représenter la matrice de transition de ce système.
   (b) Sachant qu'il fait beau aujourd'hui, quel pourcentage de chance a-t-on qu'il fasse beau dans deux jours ?
   (c) A long terme, quelle sera l'évolution du climat ?

3. Dans un laboratoire, à chaque repas, des lapins ont le choix entre manger des carottes, de la salade ou des pissenlits mais ne peuvent manger qu'un aliment d'une seule catégorie lors d'un même repas. Comme ils sont gourmands, ils ne manquent jamais un repas.
   L'observation montre que si un lapin a mangé des carottes à un repas, il en mangera au repas suivant dans 70 % des cas ; sinon, il mangera de la salade une fois sur 5 ou des pissenlits 1 fois sur 10.
   S'il a mangé de la salade, il en mangera encore 6 fois sur 10 au repas suivant ; sinon, il mangera un des deux autres aliments de façon équiprobable.
   Enfin, s'il a mangé des pissenlits, au repas suivant il y a 1 chance sur 5 qu'il mange des carottes et 2 chances sur 5 de la salade.
   (a) Si un lapin vient de manger des carottes, quelle est la probabilité qu'il mange de la salade dans deux repas ?
   (b) A longue échéance, que mange ce lapin ?

4. Un individu vit dans un milieu où il est susceptible d'attrapper une maladie par piqûre d'insecte. Il peut être dans l'un des trois états suivants : immunisé (I), malade (M), non malade et non immunisé (S). D'un mois à l'autre, son état peut changer selon les règles suivantes :
   - étant immunisé, il peut le rester avec une probabilité $0,9$ ou passer à l'état S avec une probabilité $0,1$;
   - étant dans l'état S, il peut le rester avec une probabilité $0,5$ ou passer à l'état M avec une probabilité $0,1$;
   - étant malade, il peut le rester avec une probabilité $0,2$ ou passer à l'état S avec une probabilité $0,8$.

   Déterminer
   (a) la matrice de transition du système ;
   (b) la probabilité qu'un individu immunisé soit encore immunisé après deux mois ;
   (c) la probabilité qu'à long terme, un individu soit immunisé.

5. Un biologiste étudie le passage d'une molécule de phosphore dans un écosystème. Celle-ci peut se trouver dans le sol, dans l'herbe, dans le bétail ou peut disparaître de l'écosystème. D'une heure à l'autre, le transfert peut s'effectuer selon les modalités suivantes :
   - étant dans le sol, la molécule a 3 chances sur 5 d'y rester, 3 chances sur 10 de passer dans l'herbe et 1 chance sur 10 de disparaître ;
   - étant dans l'herbe, elle a 1 chance sur 10 de revenir dans le sol, 2 chances sur 5 de rester dans l'herbe et 1 chance sur 2 de se retrouver dans le bétail ;
   - étant dans le bétail, elle a 3 chances sur 4 de retourner dans le sol, 1 chance sur 5 de rester dans le bétail et 1 chance sur 20 de disparaître ;
   - si la molécule disparaît, elle ne réapparaît plus nulle part.

   Déterminer la matrice de transition du système.

6. Depuis des mois, un laborantin de l'ile de Rêve travaille sur une substance, appelée KillCovid, très prometteuse pour la découverte d'un médicament qui permettrait de détruire le virus responsable de la maladie Covid. Le KillCovid n'a malheureusement qu'une durée de vie de deux mois.

   Le laborantin a trouvé le moyen de se servir de ce KillCovid comme catalyseur pour en produire du nouveau, à partir d'autres substances communes tenues secrètes. Il récupère donc le KillCovid utilisé à la fin du processus. Chaque mois, en utilisant 1 dose de KillCovid d'un mois, il produit 1/2 dose de nouveau KillCovid et la proportion est la même avec le KillCovid de deux mois.

   (a) Ecrire le système d'équations modélisant l'évolution du stock de KillCovid (stock âgé d'un mois et stock âgé de deux mois), en spécifiant la matrice de Leslie correspondante.
   (b) Comment va évoluer le stock de KillCovid ?

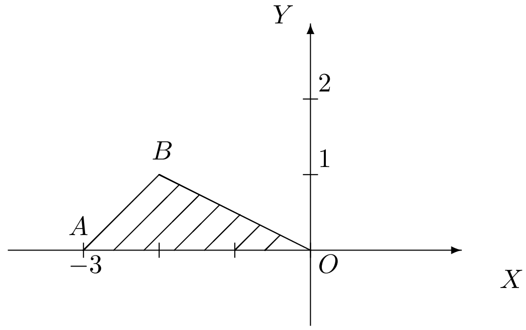
7. Les baleines bleues sont une espèce de mammifè en voie d'extinction à cause notamment de non respect de règles de pêche. Tous les 20 ans, des chercheurs recensent leur population (une estimation bien sûr) et font la répartition entre le nombre de baleines femelles de moins de 20 ans (les ≪ jeunes ≫) et celui des baleines femelles de strictement plus de 20 ans (les ≪ vieilles ≫). Ils ont trouvé le moyen de marquer les deux catégories de telle sorte que l'on puisse reconnaître les jeunes nés d'une mère de moins de 20 ans et ceux nés d'une mère de plus de 20 ans. Le comptage des baleines femelles actuellement donne les résultats suivants : 1/3 des baleines femelles ≪ jeunes ≫ ont donné naissance à un petit (survivant) et 5/8 des baleines ≪ vieilles ≫ l'ont fait. De plus, seulement 1/6 des baleines ≪ jeunes ≫ et seulement la moitié des baleines ≪ vieilles ≫ ont survécu.
   On suppose que les paramètres sont valables à grande échelle de temps...

   (a) Ecrire le système d'équations modélisant l'évolution des deux catégories de baleines, en spécifiant la matrice de Leslie correspondante.
   (b) Comment va évoluer la population ?
   (c) Pourquoi peut-on dire que l'espèce est en voie d'extinction ?

II. Représentation d'ensembles

1. Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble
$$\{(2\sqrt{1+x^2}, x) : x \in \mathbb{R}\}.$$
   a) Donner des équations paramétriques de la courbe définie par cet ensemble.
   b) Eliminer le paramètre pour obtenir une équation cartésienne.
   c) Transformer l'équation obtenue en une autre équivalente qui ressemble à une équation connue.
   d) Représenter graphiquement la courbe.
2. Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble
$$\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, |x + y - 1| \leq 1\}.$$
   a) Si la valeur absolue d'un nombre réel vaut 1, que vaut ce nombre ?
   b) Comment écrire $|x + y - 1| = 1$ de façon équivalente ?
   c) Représenter graphiquement la (les) équation(s) obtenue(s) ci-dessus.
   d) Déterminer la(les) région(s) du plan qui correspond(ent) à l'ensemble donné en la(les) hachurant. Les points des ≪ bords ≫ sont-ils compris dans l'ensemble ?
3. Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble
$$\left\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R},\ y \geq 1 + x^2 \text{ et } x^2 + 2x + y^2 \geq 3\right\}.$$
   a) Représenter la courbe d'équation $y = 1 + x^2$ ainsi que celle d'équation $x^2 + 2x + y^2 = 3$.
   b) Déterminer la région du plan qui correspond à $y \geq 1 + x^2$.
   c) Déterminer la(les) région(s) du plan qui correspond(ent) à $x^2 + 2x + y^2 \geq 3$.
   d) Hachurer la(les) région(s) du plan qui correspond(ent) à l'ensemble donné. Les points des ≪ bords ≫ sont-ils compris dans l'ensemble ?
4. Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble
$$\left\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R},\ \frac{1}{xy} \leq 1\right\}.$$
   a) A la lecture de l'énoncé, ne peut-on pas déterminer immédiatement des points du plan comme n'appartenant pas à l'ensemble ? Si oui, lesquels ?
   b) Représenter la courbe correspondant à l'égalité.
   c) Hachurer la(les) région(s) du plan qui correspond(ent) à l'ensemble donné. Les points des ≪ bords ≫ sont-ils compris dans l'ensemble ?

5. Décrire analytiquement l'ensemble E hachuré suivant, les points du bord étant compris dans l'ensemble.



a) Donner les coordonnées cartésiennes des sommets du triangle ABO.
b) Déterminer les équations cartésiennes des droites AB, BO et AO.
c) Décrire analytiquement l'ensemble E comme dans les exercices ci-dessus.
d) Quel est l'ensemble de variation des ordonnées des points de E ?
e) Si on fixe une valeur quelconque de y dans cet ensemble, quel est l'ensemble de variation des abscisses des points de E ?
f) Donner une description analytique de E autre que celle donnée en c) en se servant des deux items précédents.
g) Quel est l'ensemble de variation des abscisses des points de E ?
h) Si on fixe une valeur quelconque de x dans cet ensemble, peut-on donner l'ensemble de variation des ordonnées des points de E ? Si oui, le donner. Si non, que doit-on faire ?
i) Donner une description analytique de E autre que celles données en c) et en f) en se servant des deux items précédents.

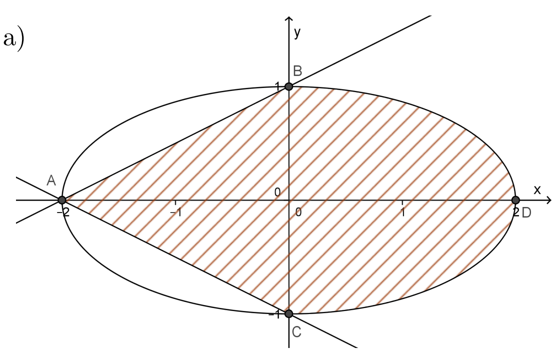
6. Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement les ensembles A et B si

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ x-2 \leq y \leq 2,\ x^2+y^2 \geq 4\} \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1,\ \frac{1}{x} \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$

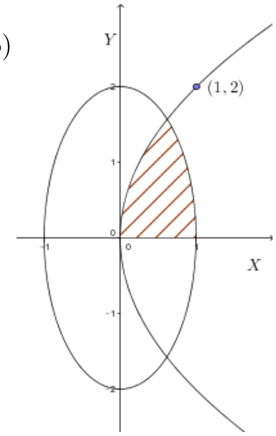
Pour chacun de ces 2 ensembles,
a) déterminer leur ensemble X (respectivement Y) de variation des abscisses (resp. des ordonnées)
b) à abscisse (resp. ordonnée) fixée dans X (resp. Y) donner l'ensemble de variation des ordonnées (resp. des abscisses) de leurs points
c) donner 2 descriptions analytiques en se servant des 2 items précédents.

7. Décrire analytiquement l'ensemble borné fermé hachuré suivant en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses.
Faire de même en commençant par l'ensemble de variation des abscisses.

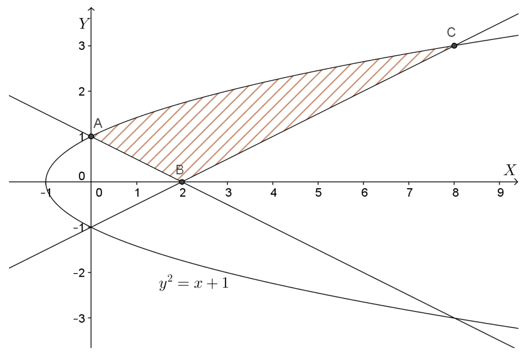
a)



b)



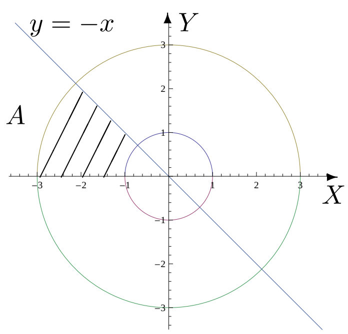
c)

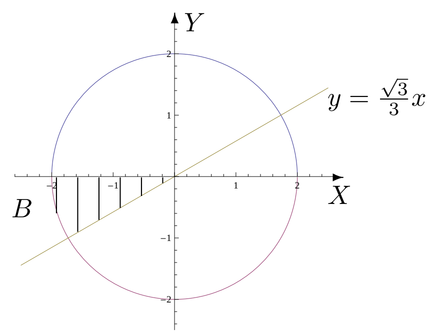


8. On donne l'ensemble B suivant. Représenter graphiquement celui-ci en le hachurant.

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 2\pi],\ \sin(2x) \leq y \leq \sin(x)\}.$$

9. En utilisant les coordonnées polaires, décrire analytiquement les ensembles hachurés suivants, les points des bords étant compris dans A mais non dans B.





10. Dans un repère orthonormé du plan, représenter, en le hachurant, l'ensemble dont une description analytique est

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 > 1\}.$$

Ensuite, décrire analytiquement cet ensemble en utilisant les coordonnées polaires.

Liste 6 : fonctions de plusieurs variables (1)

A préparer AVANT de venir à la répétition

I. Définitions et représentations graphiques

Qu'appelle-t-on

1. domaine de définition d'une fonction de 2 variables ?
2. courbe de niveau d'une fonction de 2 variables ?
3. surface de niveau d'une fonction de 3 variables ?
4. trace d'une surface de niveau dans un plan orthogonal à l'un des axes ?
5. surface quadrique ? Quelles sont les différentes quadriques ?

II. Dérivation et gradient

1. Quand dit-on qu'une fonction de 2 variables est dérivable par rapport à sa première (resp. deuxième) variable en un point de coordonnées (x_0, y_0) d'un ouvert où elle est définie ?
2. Qu'appelle-t-on dérivée partielle d'une fonction de deux variables ?
3. Définir le gradient d'une fonction de plusieurs variables.

Exercices de base

Lors de la répétition, les exercices I. 1(g) et II. 2(h) - 5(c) seront résolus par l'assistant.

I. Définitions et représentations graphiques

1. Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous et le représenter.

$$f(x,y) = \ln\left(\frac{y^2}{4} - x^2 + 1\right), \quad g(x,y) = \sqrt{1 - |2x - y|}, \quad h(x,y) = \arccos(xy).$$

S'il appartient au domaine de définition, donner l'image de $(1/2, -1)$ par f, de $(1, 2)$ par g et de $(2, 1)$ par h. Dans un repère orthonormé de l'espace représenter ces points et leur image éventuelle.

2. Dans chacun des cas suivants, représenter les courbes de niveau d'équation $f(x,y) = c$ si
a) $f(x,y) = 4x - y$ et $c = -2,\ 4$
b) $f(x,y) = x^2 - y^2$ et $c = -1,\ 0,\ 1$
c) $f(x,y) = x^2 - y$ et $c = -2,\ 1$

3. On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé ; on appelle X, Y, Z les trois axes de celui-ci. Représenter la trace de la surface d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 4z^2 = 1$ dans le plan d'équation $z = 0$ puis dans celui d'équation $x = 0$. Comment appelle-t-on chacune de ces courbes ? Quelle est la nature de cette quadrique ?

4. Esquisser les représentations graphiques des surfaces quadriques dont les équations cartésiennes sont

$$a)\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1 \qquad\qquad b)x^2 + y^2 = 4.$$

II. Dérivation et gradient

1. En appliquant la définition des dérivées, montrer que la fonction f donnée explicitement par $f(x,y) = 3x^2 + xy,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ est dérivable par rapport à sa première variable au point $(-1,2)$ et donner la valeur de cette dérivée partielle en ce point.

2. On donne les fonctions f, g et h par
$$f(x,y) = \ln(x^2 - 4 + y), \quad g(x,y) = \cos(x^2y^2 + 4y) \quad \text{et} \quad h(x,y) = x^2\, e^{-\frac{x}{y}}.$$
a) Déterminer leur domaine de définition, de dérivabilité et les représenter dans un repère orthonormé.
b) Déterminer les dérivées partielles de ces fonctions.

3. On donne la fonction f par $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2 + 4y^2})$.
a) Déterminer son domaine de définition et d'infinie dérivabilité.
b) Dans le domaine d'infinie dérivabilité, calculer $D_x^2 f + D_y^2 f$.

4. a) Déterminer le gradient de la fonction f donnée par $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2\, x_2 \sin(3x_3)$.
b) Même question pour la fonction g donnée par $g(x,y,z) = x^2 e^{xy^2\sqrt{z}}$.

5. On donne les fonctions f et g respectivement par
$$f(x,y) = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right) \qquad g(x,y) = \exp(\sqrt{x + y^2 + 1}).$$
a) Déterminer le domaine de définition A et d'infinie dérivabilité B de ces fonctions. Représenter ces domaines.
b) Déterminer l'expression explicite de $|x|D_x f(x,y) + |y|D_y f(x,y)$.
c) Déterminer l'expression explicite de $F(t) = f\left(\frac{1}{t}, t\right)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée.
d) Déterminer l'expression explicite de $G(t) = g(\sin^2(t), \cos(t))$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée.

6. On donne la fonction $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
a) Déterminer son domaine de définition A et celui d'infinie dérivabilité B.
b) Si on définit F par $F(x,y) = f(x,y)(D_x^2 f(x,y) + D_y^2 f(x,y)),\ (x,y) \in B$, montrer que F est une fonction constante et déterminer cette constante.

7. On donne la fonction $f(x,y) = \sin(ax)\cos(by)$ où a et b sont des constantes réelles non nulles. Montrer que f vérifie l'équation des ondes $D_x^2 f - \dfrac{a^2}{b^2} D_y^2 f = 0$.

8. L'expérience montre que, dans un champ de température, la chaleur s'écoule dans la direction et le sens dans lesquels la température décroît le plus vite. Trouver cette direction et ce sens en tout point du champ puis en un point P donné dans les cas suivants :
a) $T(x,y) = x^2 - y^2$ et P a pour coordonnées $(2,1)$
b) $T(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ et P a pour coordonnées $(2,2)$
Esquisser l'isotherme correspondant à la valeur 3 dans le premier cas et à $\frac{\pi}{4}$ dans le second ainsi que les vecteurs qui correspondent à la direction et au sens obtenus au point P.

Liste 7 : fonctions de plusieurs variables (2)

A préparer AVANT de venir à la répétition

I. Dérivation des fonctions composées

1. Qu'appelle-t-on fonction composée ?
2. Quel est l'énoncé du théorème donnant les dérivées partielles d'une fonction composée à partir des dérivées partielles des fonctions de départ ?

II. Extrema de fonctions de 2 variables

1. Qu'appelle-t-on point stationnaire ? Comment trouver de tels points ?
2. Que faut-il calculer pour rechercher un éventuel minimum, maximum ou point selle ?

III. Permutation de l'ordre d'intégration

Qu'appelle-t-on « permutation de l'ordre d'intégration » dans le calcul des intégrales doubles ? Peut-on toujours le faire sans changer la valeur du resultat si on intègre sur un ensemble fermé borné ?

IV. Intégration sur des ensembles fermés bornés

Quand une fonction de 2 variables est-elle intégrable sur un ensemble fermé borné ?

Exercices de base

Lors de la répétition, les exercices I. 2(a-b-c), II. 1(d) et 2, III. 1(a) et IV. 2(b) - 3(b) seront résolus par l'assistant.

I. Dérivation des fonctions composées

1. a) On donne f, continûment dérivable sur $]-2,4[\times]-5,5[$. On demande le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par $F(x,y) = f(x+2y, 2x-5y)$, sa représentation graphique ainsi que l'expression de ses dérivées partielles en fonction de celles de f.
   b) Même question pour g, continûment dérivable sur $]0,1[\times]\ln(\frac{\pi}{3}),+\infty[$ et $G(x,y) = g(\exp(x),\ \ln(\operatorname{arcos}(y)))$.

2. On donne la fonction g continûment dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}[\times]0,+\infty[\times]0,\frac{10}{9}[$.
   a) Déterminer le domaine de dérivabilité de $f : t \mapsto f(t) = g(\arcsin(2t), \frac{1}{\sqrt{t+1}}, t^2+1)$.
   b) Calculer la dérivée de f en fonction des dérivées partielles de g.
   c) Si elle est définie, que vaut cette dérivée en 0 ? en $1/3$?
   d) Mêmes questions si g est continûment dérivable sur $]-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}[\times]\sqrt{2},+\infty[\times]0,3[$.

3. Soit $F(t) = f(x(t), y(t))$ avec $x(3) = 2,\ y(3) = 7,\ (Dx)(3) = 5,\ (Dy)(3) = -4,\ (D_xf)(2,7) = 6$ et $(D_yf)(2,7) = -8$. En supposant satisfaites les hypothèses du théorème de dérivation des fonctions composées en 3, que vaut (DF)(3) ?

4. Soit $F(s,t) = f(u(s,t), v(s,t))$. En supposant satisfaites les hypothèses du théorème de dérivation des fonctions composées en $(1,0)$ si

$$u(1,0) = 2 \quad (D_s u)(1,0) = -2 \quad (D_t u)(1,0) = 6$$

$$v(1,0) = 3 \quad (D_s v)(1,0) = 5 \quad (D_t v)(1,0) = 4$$

et $(D_u f)(2,3) = -1$ et $(D_v f)(2,3) = 10$, calculer $(D_s F)(1,0)$ et $(D_t F)(1,0)$.

II. Extrema de fonctions de 2 variables

1. Rechercher les extrema ainsi que les points-selles des fonctions
   (a) $f:\ (x,y) \mapsto f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.
   (b) $f:\ (x,y) \mapsto f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x - 10y + 30$
   (c) $f:\ (x,y) \mapsto f(x,y) = y^2 - 3x^2 + 5$
   (d) $f:\ (x,y) \mapsto f(x,y) = x^4 + y^4 - 8xy + 4$
   (e) $f:\ (x,y) \mapsto f(x,y) = 3xy^2 + x^3 - 3y^2 - 3x^2 + 2$
   (f) $f:\ (x,y) \mapsto f(x,y) = \cos(x) + \cos(y) + \cos(x+y),\ x, y \in [0, 2\pi[$

2. Déterminer la distance[4] (c'est-à-dire la plus courte distance) entre le point de coordonnées $(1,0,-2)$ et le plan d'équation cartésienne $x + 2y + z = 4$.

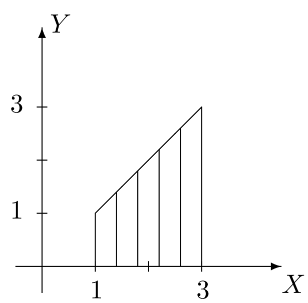
III. Permutation de l'ordre d'intégration

1. Supposons que la fonction f est intégrable sur l'ensemble considéré. Permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration dans les cas suivants

$$a) \int_{-1}^{1} \left(\int_{y-2}^{2-y} f(x,y)\ dx \right)\ dy \qquad\qquad b) \int_{0}^{3} \left(\int_{y}^{\sqrt{18-y^2}} f(x,y)\ dx \right)\ dy.$$

2. On considère une fonction f intégrable sur l'ensemble hachuré fermé borné A ci-dessous. Ecrire, dans un ordre et dans l'autre, l'intégrale

$$\int\int_A f(x,y) dx\, dy.$$



IV. Intégration sur des ensembles fermés bornés

1. Dans le plan, on considère l'ensemble borné fermé A délimité par le graphique de la droite d'équation cartésienne $x + y = 0$ et celui de la fonction $x \mapsto -x^2$.
   a) Représenter A dans un repère orthonormé et en donner une expression analytique.
   b) Calculer, si elle existe, l'intégrale de f sur A si $f : (x,y) \mapsto f(x,y) = x\cos(y)$.

---

4. Suggestion : la distance entre deux points de coordonnées (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) est donnée par

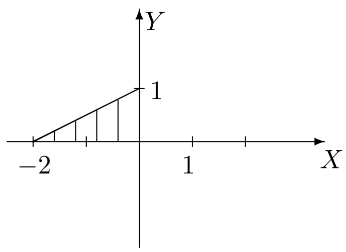
$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

et, comme $d \geq 0$, minimiser d équivaut à minimiser d^2.

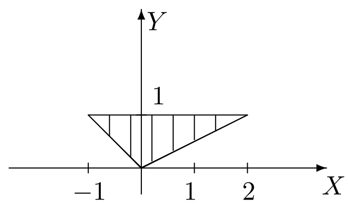
2. Si elle existe, calculer l'intégrale de
   a) $f(x,y) = 4 + x^2$ sur $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2,2],\ y \in [1+x^2, 9-x^2]\}$
   b) $f(x,y) = \cos(y^2)$ sur $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,0],\ y \in [-x,1]\}$
   c) $f(x,y) = y^2 \cos(xy)$ sur $A = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \times [-1,1]$

3. Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale sur l'ensemble A borné fermé hachuré ci-dessous dans les cas suivants

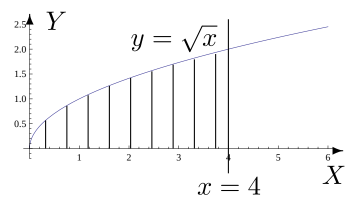
a) $\int\int_A e^{x-y}\ dx\,dy$



b) $\int\int_A xy\ dx\,dy$



c) $\displaystyle\int\int_A \frac{y}{\sqrt{1+x^2}}\ dx\,dy$



Liste 8 : fonctions de plusieurs variables (3) Découplage d'un système d'équations différentielles

A préparer AVANT de venir à la répétition

I. Intégration par changement de variables polaires

1. Donner la formule d'intégration par changement de variables polaires dans le cas d'une fonction continue sur un ensemble fermé borné.

II. Découplage d'un système d'équations différentielles

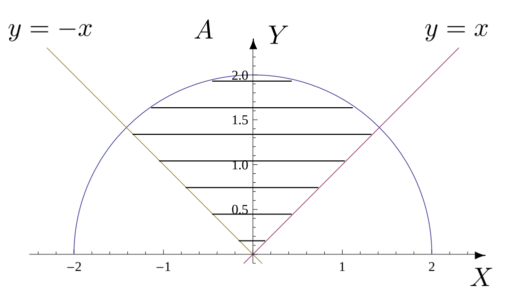
1. Quelles sont les différentes étapes à envisager successivement pour découpler un système d'équations différentielles à coefficients constants ?

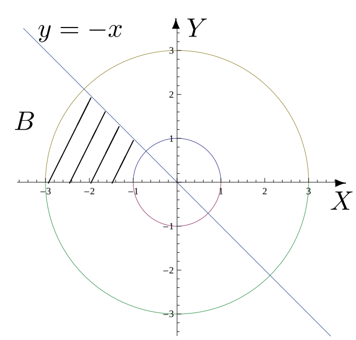
Exercices de base

Lors de la répétition, les exercices I. 1 (c) et II. 2 seront résolus par l'assistant.

I. Intégration par changement de variables polaires

1. Si elle existe, calculer
   a) $\int\int_A \sqrt{x^2+y^2}\; dx\, dy$ où A est l'ensemble hachuré ci-dessous.
   b) $\int\int_B xy\; dx\, dy$ où B est l'ensemble hachuré ci-dessous.
   c) $\int\int_C (2x+y)\; dx\, dy$ où $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \inf\{-x, \sqrt{1-x^2}\}\}$.





2. Soit A une partie du plan (bornée et fermée). Le centre de masse de A (considéré homogène) est défini comme le point de coordonnées (x_A, y_A) où

$$x_A = s^{-1}\int\int_A x\; dx\; dy, \quad y_A = s^{-1}\int\int_A y\; dx\; dy$$

et où s est l'aire de la surface A.
Déterminer la position du centre de masse d'une plaque homogène dont la forme est un tiers de cercle de rayon R (R réel strictement positif).

II. Découplage d'un système d'équations différentielles

1. Le mouvement d'une particule se déplaçant dans le plan est régi par les équations différentielles suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Dx(t) & = & -4x(t) - 3y(t) + 5t \\ Dy(t) & = & -2x(t) - 5y(t) + 5e^t \end{array} \right. .$$

Déterminer les composantes $(x(t), y(t))$ du vecteur position de cette particule à tout instant t.

2. Le mouvement d'une particule se déplaçant dans l'espace est régi par les équations différentielles suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Dx(t) & = & x(t) + 2y(t) - z(t) \\ Dy(t) & = & 2x(t) + 4y(t) - 2z(t) \\ Dz(t) & = & -x(t) - 2y(t) + z(t) \end{array} \right. .$$

Déterminer les composantes $(x(t), y(t), z(t))$ du vecteur position de cette particule à tout instant t.

3. Résoudre les systèmes d'équations différentielles suivants :

(a) $\left\{ \begin{array}{rcl} Dx(t) & = & x(t) + 3y(t) \\ Dy(t) & = & 2x(t) + 2y(t). \end{array} \right.$

(b) $\left\{ \begin{array}{rcl} Dx(t) & = & x(t) - y(t) \\ Dy(t) & = & x(t) + y(t). \end{array} \right.$

(c) $\left\{ \begin{array}{rcl} D^2x(t) & = & x(t) - y(t) \\ D^2y(t) & = & -4x(t) + y(t). \end{array} \right.$

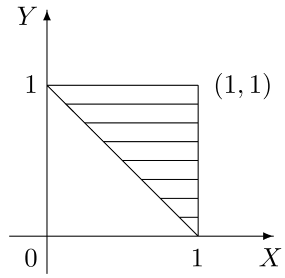
(d) $\left\{ \begin{array}{rcl} Dx(t) & = & x(t) + 6y(t) \\ Dy(t) & = & x(t) + 2y(t) \\ Dz(t) & = & x(t) + y(t) + 3z(t). \end{array} \right.$

III. Divers

1. Si une charge électrique est répartie sur une région R et si la densité de charges (en unités par unités carrées) est donnée par $\rho(x, y)$ en un point(x, y) de R, alors la charge totale Q présente sur cette région est donnée par

$$Q = \iint_R \rho(x, y)\, dxdy.$$

Une charge électrique est distribuée sur le domaine triangulaire D de la figure ci-dessous de manière telle que la densité de charge en (x, y) est donnée par $\rho(x, y) = 2xy$, mesurée en coulombs par mètre carrés (C/m^2). Calculer la charge totale présente sur D.



2. En physique, le *moment d'inertie* d'une masse ponctuelle m par rapport à un axe est défini par le produit mr^2, où r est la distance entre la masse ponctuelle m et l'axe. Cette notion se généralise au cas d'une plaque de métal, qui occupe une région R du plan et dont la densité en (x, y) est donnée par $\rho(x, y)$, de la manière suivante.
   Le moment d'inertie d'une telle plaque par rapport à l'axe des abscisses (resp. des ordonnées) vaut
   $$I_X = \iint_R x^2 \rho(x, y)\, dxdy \qquad \left(\text{resp. } I_Y = \iint_R y^2 \rho(x, y)\, dxdy\right).$$
   Il peut également être intéressant de considérer le moment d'inertie par rapport à l'origine O, celui-ci étant donné par
   $$I_O = \iint_R (x^2 + y^2)\rho(x, y)\, dxdy.$$
   On remarque évidemment que $I_O = I_X + I_Y$.

   Soit un disque homogène D de densité $\rho(x, y) = \rho$ et de diamètre d. Déterminer
   a) le moment d'inertie de ce disque par rapport à son centre ;
   b) le moment d'inertie de ce disque par rapport à une droite quelconque d' passant par son centre.

Chapitre 2

Révisions et compléments

2.1 Exercices de base sur la liste 1 : nombres complexes

Dans cette section figurent quelques exercices de base (dont il a été question durant les années académiques mentionnées).

Dans tout ce qui suit, sauf mention du contraire, x est l'inconnue réelle.

Liste 2002/2003

1. Déterminer les parties réelle et imaginaire, le module et le conjugué de chacun des complexes suivants.
$$i, \quad \frac{1}{i}, \quad i(-i+3), \quad \frac{2i+1}{2i-1}, \quad \frac{2i+1}{-2i+1}.$$
2. a) Déterminer la forme trigonométrique des complexes suivants :
$$i, \quad 1+i, \quad \frac{1}{i}.$$
b) Déterminer les racines quatrièmes du complexe -1. Représenter ces racines.

Liste 2003/2004

1. Déterminer les parties réelle et imaginaire, le module et le conjugué de chacun des complexes suivants.
$$i, \quad \frac{1}{i}, \quad i(-i+3), \quad \frac{2i+1}{2i-1}, \quad \frac{2i+1}{-2i+1}, \quad i^3, \quad \frac{1}{i^4}, \quad \frac{1}{-i+1}, \quad \frac{-3i+1}{i-1}$$
2. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:
$$2iz+3=0, \quad z^2+4=0, \quad z^2+z+1=0.$$
3. Déterminer les racines cubiques du complexe -2 et en donner la représentation géométrique.
4. Déterminer les racines cubiques du complexe $1+i$ et du complexe $-i$. En donner une représentation géométrique.
5. QCM
   (a) Le carré d'un nombre complexe est toujours un nombre positif□ un nombre négatif□ un nombre imaginaire pur□ aucune réponse correcte□
   (b) La partie réelle du produit de deux nombres complexes est toujours égale
   au produit des parties réelles de ces nombres□
   à la somme des parties réelles de ces nombres□

à la somme de la partie réelle de l'un et de la partie imaginaire de l'autre□
au produit de la partie réelle de l'un et de la partie imaginaire de l'autre□
aucune réponse correcte□

(c) Le conjugué du complexe $\frac{i}{i+1}$ est $\frac{-i}{i+1}$□ $\frac{i}{-i+1}$□ $\frac{-i}{-i+1}$□ aucune réponse correcte□

Liste 2004/2005

1. Déterminer les parties réelle et imaginaire, le module et le conjugué de chacun des complexes suivants.
$$i+1, \quad (1+i)^2, \quad (2i+1)(-i+3), \quad \frac{2i+1}{i+1}$$
2. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$ et en représenter les solutions :
$$iz^2+1=0, \quad 4z^2+1=0, \quad z^2-z+1=0.$$
3. Déterminer les racines cubiques du complexe i et en donner la représentation géométrique.
4. Déterminer les racines quatrièmes du complexe -16. En donner une représentation géométrique.
   Déterminer les racines carrées et les racines quatrièmes du complexe $\frac{i\sqrt{3}-1}{2}$. En donner la représentation géométrique.

2.2 Résolution des exercices de la "liste type 2002/2003"

Exercice 1

Rappelons tout d'abord que si $z=a+ib$ $(a,b\in\mathbb{R})$ alors sa partie réelle, notée $\Re z$, est a, sa partie imaginaire, notée $\Im z$, est b, son module, noté $|z|$, est $\sqrt{a^2+b^2}$ et son conjugué, noté $\overline{z}$, est $a-ib$. Rappelons aussi que $z.\overline{z}=|z|^2$.
Ecrivons les différentes expressions données sous la forme $a+ib$; on a
1) $i=0+1i$
2) $\frac{1}{i}=-i$ si on multiplie numérateur et dénominateur par $-i$, conjugué de i
3) $i(-i+3)=-i^2+3i=1+3i$ puisque $i^2=-1$
4) $\frac{2i+1}{2i-1}=\frac{(1+2i)(-1-2i)}{(-1)^2+2^2}=\frac{-1-4i-4i^2}{5}=\frac{-1+4-4i}{5}=\frac{3-4i}{5}$ si on multiplie numérateur et dénominateur par $-1-2i$, conjugué de $-1+2i$
5) $\frac{2i+1}{-2i+1}=\frac{(1+2i)(1+2i)}{1^2+(-2)^2}=\frac{1+4i+4i^2}{5}=\frac{1-4+4i}{5}=\frac{-3+4i}{5}$ (même démarche que ci-dessus).
Ainsi,

z	$\Re z$	$\Im z$	$\|z\|$	$\overline{z}$
i	0	1	1	$-i$
$1/i$	0	-1	1	i
$i(-i+3)$	1	3	$\sqrt{10}$	$1-3i$
$\frac{2i+1}{2i-1}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	1	$\frac{3+4i}{5}$
$\frac{2i+1}{-2i+1}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{-3-4i}{5}$

Exercice 2

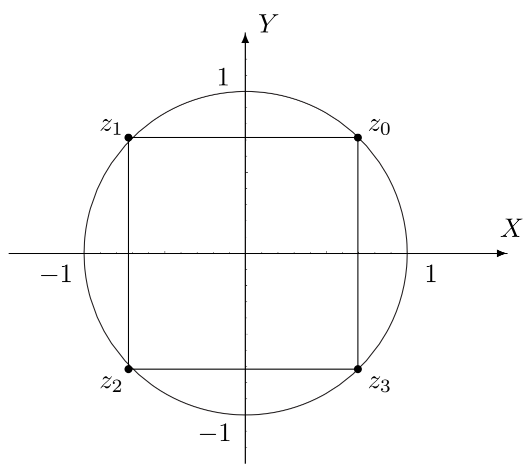
a) Forme trigonométrique d'un nombre complexe

- La forme trigonométrique de i est $e^{i\frac{\pi}{2}}$ car $i = 0 + i\ .\ 1$ et donc $r = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$. De plus, comme $\cos(\theta) = 0$ et $\sin(\theta) = 1$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$, on a $\theta = \frac{\pi}{2}$.
- Considérons $z = 1 + i$; on a $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ et, dès lors, $z = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Ainsi, $\cos(\theta) = \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$, ce qui donne $\theta = \frac{\pi}{4}$. Pour conclure, la forme trigonométrique de $1 + i$ est donc $\sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{4}}$.
- Le complexe $\frac{1}{i} = -i$ s'écrit sous forme trigonométrique $e^{i\frac{3\pi}{2}}$ puisque $r = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$, $\cos(\theta) = 0$ et $\sin(\theta) = -1$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$.

b) La forme trigonométrique de -1 est $e^{i\pi}$. Ainsi, ses racines quatrièmes sont données par $z_k = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}$ avec $k = 0, 1, 2, 3$. Dès lors, on a

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}},\ z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}},\ z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}} \text{ et } z_3 = e^{i\frac{7\pi}{4}}.$$

Ces racines quatrièmes se représentent sur le cercle centré à l'origine de rayon 1 et sont les sommets d'un carré, points communs au cercle et aux droites d'équation $y = x$ et $y = -x$.



2.3 Solutions des exercices de la "liste type 2003/2004"

Exercice 1

z	$\Re z$	$\Im z$	$\|z\|$	$\overline{z}$
i	0	1	1	$-i$
$\frac{1}{i}$	0	-1	1	i
$i(-i+3)$	1	3	$\sqrt{10}$	$1-3i$

z	$\Re z$	$\Im z$	$\|z\|$	$\overline{z}$
$\frac{2i+1}{2i-1}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	1	$\frac{3+4i}{5}$
$\frac{2i+1}{-2i+1}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{-3-4i}{5}$
i^3	0	-1	1	i

z	$\Re z$	$\Im z$	$\lvert z\rvert$	$\overline{z}$
$\frac{1}{i^4}$	1	0	1	1
$\frac{1}{-i+1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1-i}{2}$
$\frac{-3i+1}{i-1}$	-2	1	$\sqrt{5}$	$-2-i$

Exercice 2

$S=\{\frac{3i}{2}\}$ $\qquad$ $S=\{-2i,2i\}$ $\qquad$ $S=\{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\}$

Exercice 3

$z_0=\sqrt[3]{2}\ e^{i\frac{\pi}{3}},\qquad z_1=\sqrt[3]{2}\ e^{i\pi},\qquad z_2=\sqrt[3]{2}\ e^{i\frac{5\pi}{3}}.$
Représentation : sommets du triangle équilatéral inscrit dans le cercle centré à l'origine et de rayon $\sqrt[3]{2}$. Un des sommets appartient à l'axe des X, son abscisse étant négative.

Exercice 4

Pour $1+i$: $z_0=\sqrt[6]{2}\ e^{i\frac{\pi}{12}},\qquad z_1=\sqrt[6]{2}\ e^{i\frac{3\pi}{4}},\qquad z_2=\sqrt[6]{2}\ e^{i\frac{17\pi}{12}}.$
Représentation : sommets du triangle équilatéral inscrit dans le cercle centré à l'origine et de rayon $\sqrt[6]{2}$. Un des sommets appartient à la deuxième bissectrice et est situe dans le second quadrant.

Pour $-i$: $z_0=e^{i\frac{\pi}{2}},\qquad z_1=e^{i\frac{7\pi}{6}},\qquad z_2=e^{i\frac{11\pi}{6}}.$
Représentation : sommets du triangle équilatéral inscrit dans le cercle centré à l'origine et de rayon 1. Un des sommets appartient à l'axe des Y, son ordonnée étant positive.

Exercice 5 : QCM

(a) aucune réponse correcte
(b) aucune réponse correcte
(C) $\dfrac{-i}{-i+1}$

2.4 Solutions des exercices de la "liste type 2004/2005"

Exercice 1

z	$\Re z$	$\Im z$	$\lvert z\rvert$	$\overline{z}$
$i+1$	1	1	$\sqrt{2}$	$1-i$
$(1+i)^2$	0	2	2	$-2i$
$(2i+1)(-i+3)$	5	5	$5\sqrt{2}$	$5-5i$
$\frac{2i+1}{i+1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{10}}{2}$	$\frac{3-i}{2}$

Exercice 2

$S = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right\}$ $\qquad$ $S = \left\{\frac{-i}{2}, \frac{i}{2}\right\}$ $\qquad$ $S = \left\{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right\}$

Exercice 3

Les racines cubiques de i sont $z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}}, z_1 = e^{i\frac{5\pi}{6}}, z_2 = e^{i\frac{3\pi}{2}}$. Ce sont les sommets du triangle équilatéral inscrit dans le cercle trigonométrique dont le sommet correspondant à z_2 est le point de coordonnées $(0, -1)$.

Exercice 4

Les racines quatrièmes de -16 sont $z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}, z_1 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}, z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{4}}, z_3 = 2e^{i\frac{7\pi}{4}}$. Ce sont les sommets du carré inscrit dans le cercle centré à l'origine et de rayon 2, z_0 correspondant au point de coordonnées $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
Les racines carrées de $\frac{i\sqrt{3}-1}{2}$ sont $z_0 = e^{i\frac{\pi}{3}}, z_1 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Ce sont les points diamétralement opposés du cercle trigonométrique dont l'un a pour coordonnées $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.
Les racines quatrièmes de $\frac{i\sqrt{3}-1}{2}$ sont $z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}}, z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}, z_2 = e^{i\frac{7\pi}{6}}, z_3 = e^{i\frac{5\pi}{3}}$. Ce sont les sommets du carré inscrit dans le cercle trigonométrique, z_0 correspondant au point de coordonnées $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.

2.5 Exercices de base sur la liste 2 : équations différentielles

Dans cette section figurent quelques exercices de base (dont il a été question durant les années académiques mentionnées).

Liste 2002-2003

1. Résoudre les équations suivantes

$$\begin{array}{ll} 1)\ iDf(x) + 3f(x) = 2x + i & 2)\ Df(x) = \cos(x) + 2f(x) \\ 3)\ 2Df(x) + 4f(x) = e^{-2x} & 4)\ Df(t) + f(t) = \frac{1}{1+e^{2t}} \\ 5)\ D^2f(x) + Df(x) = xe^x & 6)\ D^2f(x) + 2Df(x) + f(x) = 1 + \sin(x) \\ 7)\ D^2f(x) + 4f(x) = \cos(2x) & 8)\ D^2f(x) + f(x) = \frac{1}{\cos(x)} \end{array}$$

Dans le cas 1), quelle est la solution qui s'annule en 1 ?

Dans le cas 5), quelle est la solution qui vaut 1 en 1 et dont la dérivée s'annule en 1 ?

Dans le cas 7), quelle est la solution qui s'annule en 0, ainsi que sa dérivée ?

Liste 2003-2004

1. Soit $r > 0$. Représenter graphiquement la fonction $y(x) = \sqrt{r^2 - x^2},\ x \in [-r, r]$ et montrer qu'elle vérifie l'équation différentielle
$$yD_xy + x = 0,\ x \in]-r, r[.$$

2. Résoudre les équations différentielles ou les systèmes suivants, en spécifiant sur quel intervalle on se place
$$a)\ \left\{\begin{array}{l} iDf(x) + 2f(x) = 3i \\ f(1) = i \end{array}\right. \qquad b)\ Df(x) + f(x) = \frac{1}{1+e^{2x}}$$

c) $\begin{cases} D^2f(x)+9Df(x)=x \\ f(1)=1 \\ Df(1)=0 \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} D^2f(x)+9f(x)=x \\ f(0)=0 \\ Df(0)=0 \end{cases}$

e) $9D^2f(x)+6Df(x)+f(x)=1+xe^x$ *f)* $9D^2f(x)+6Df(x)+f(x)=e^{-\frac{x}{3}}$

g) $D^2f(x)-f(x)=\frac{1}{e^x+e^{-x}}$ *h)* $iD^2f(x)-f(x)=e^x$

i) $D^2f(x)+4f(x)=\cos(x)$ *j)* $D^2f(x)+4f(x)=\cos^2(x)$

Liste 2004-2005

1. A proposer aux étudiants.
   — L'équation différentielle $(D_ty)^2=4(y+1)$ est -elle linéaire ?
   Montrer que la fonction $g(t)=t^2-2t,\ (t\in\mathbb{R})$ vérifie le système

$$\begin{cases} (D_ty)^2=4(y+1) \\ y(0)=0 \\ y(2)=0 \end{cases}$$

   — Dans l'étude des solutions des équations différentielles linéaires à coefficients constants, on a rencontré des fonctions fondamentales que l'on a appelées fonctions du type "exponentielle polynôme". Comment s'écrit explicitement une telle fonction ?
2. Résoudre les équations différentielles ou les systèmes suivants, en spécifiant sur quel intervalle on se place

a) $\begin{cases} i^3Df(x)+2f(x)=3i \\ f(1)=i^2 \end{cases}$ *b)* $Df(x)-f(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}$

c) $Df(x)+2f(x)=\frac{1}{1+e^x}$ *d)* $\begin{cases} 4D^2f(x)+Df(x)=x \\ f(1)=1 \\ Df(1)=0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4D^2f(x)+f(x)=x \\ f(0)=0 \\ Df(0)=0 \end{cases}$ *f)* $D^2f(x)+Df(x)-2f(x)=xe^x+e^{2x}$

g) $4D^2f(x)+f(x)=1+\sin(x)+\sin^2(x)$ *h)* $D^2f(x)+4Df(x)+4f(x)=1+e^{-2x}$

i) $D^2f(x)-f(x)=\frac{1}{e^x+e^{-x}}$

2.6 Résolution des exercices de la "liste type 2002/2003"

Exercice 1

1. Résolvons l'équation d'ordre 1 homogène $iDf(x)+3f(x)=0$. L'équation caractéristique est $iz+3=0$ et son seul zéro est $3i$. Dès lors, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$f_H(x)=C\ e^{3ix},\ x\in\mathbb{R}$$

   où C est une constante arbitraire complexe.

   Cherchons à présent une solution particulière sur $\mathbb{R}$ puisque le second membre $x\mapsto g(x)=2x+i$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Comme on peut écrire $g(x)$ sous la forme $(2x+i)\ .\ e^{0x}$, produit d'un polynôme du premier degré et d'une exponentielle dont le coefficient 0 de l'argument n'est pas solution de l'équation caractéristique, il existe une solution de la forme $f_P(x) = Ax + B$ où A et B doivent être déterminés. Puisque $Df_P(x) = A$, on a

$$iDf_P(x) + 3f_P(x) = 2x + i \Leftrightarrow iA + 3Ax + 3B = 2x + i \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3A = 2 \\ iA + 3B = i \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{2}{3} \\ B = \frac{i}{9} \end{array} \right. .$$

Ainsi, on obtient une solution particulière

$$f_P(x) = \frac{2x}{3} + \frac{i}{9},\ x \in \mathbb{R}$$

et les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$f(x) = C\ e^{3ix} + \frac{2x}{3} + \frac{i}{9},\ x \in \mathbb{R}$$

où C est une constante arbitraire complexe.

Déterminons la solution f qui s'annule en 1 c'est-à-dire telle que $f(1) = 0$. On a $Ce^{3i} + \frac{2}{3} + \frac{i}{9} = 0 \Leftrightarrow C\ e^{3i} + \frac{6+i}{9} = 0 \Leftrightarrow C = \frac{-6-i}{9} e^{-3i}$. La solution cherchée est donc la fonction

$$f(x) = -\frac{6+i}{9}\ e^{3i(x-1)} + \frac{2x}{3} + \frac{i}{9},\ x \in \mathbb{R}.$$

2. Résolvons l'équation d'ordre 1 homogène $Df(x) - 2f(x) = 0$. L'équation caractéristique est $z - 2 = 0$ et son seul zéro est 2. Dès lors, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$f_H(x) = C\ e^{2x},\ x \in \mathbb{R}$$

où C est une constante arbitraire complexe.

Cherchons maintenant une solution particulière sur $\mathbb{R}$, le second membre $x \mapsto g(x) = \cos(x)$ étant une fonction continue sur $\mathbb{R}$. De plus, comme l'équation est à coefficients réels et que $\cos(x) = \Re(e^{ix})$, une solution particulière sera donnée par la partie réelle d'une solution particulière de $DF(x) - \ 2\ F(x) = e^{ix}$. Le second membre de cette équation est l'exponentielle polynôme $1\ .\ e^{ix}$, produit d'un polynôme de degré 0 et d'une exponentielle dont le coefficient i de l'argument n'est pas solution de l'équation caractéristique. Il existe donc une solution de la forme $F(x) = A\ e^{ix}$ où A doit être déterminé. Puisque $DF(x) = Ai\ e^{ix}$, on a

$$DF(x) - 2F(x) = e^{ix} \Leftrightarrow Ai\ e^{ix} - 2A\ e^{ix} = e^{ix} \Leftrightarrow (-2+i)A = 1 \Leftrightarrow 5A = -2 - i \Leftrightarrow A = \frac{-2-i}{5}.$$

Ainsi, $F(x) = \dfrac{-2-i}{5}\ e^{ix} = \left(-\dfrac{2}{5} - \dfrac{i}{5}\right)(\cos(x) + i\sin(x))$ et, dès lors,

$$f_P(x) = \Re F(x) = -\frac{2}{5}\cos(x) + \frac{1}{5}\sin(x), x \in \mathbb{R}.$$

En conclusion, les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$f(x) = C\ e^{2x} - \frac{2}{5}\cos(x) + \frac{1}{5}\sin(x),\ x \in \mathbb{R}$$

où C est une constante arbitraire complexe.

3. Résolvons l'équation d'ordre 1 homogène $2Df(x) + 4f(x) = 0$. L'équation caractéristique est $2z + 4 = 0$ et son seul zéro est -2. Dès lors, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$f_H(x) = C\ e^{-2x},\ x \in \mathbb{R}$$

où C est une constante arbitraire complexe.

Cherchons à présent une solution particulière sur $\mathbb{R}$ puisque le second membre $x \mapsto g(x) = e^{-2x}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Comme on peut écrire g sous la forme de l'exponentielle polynôme $1\ .\ e^{-2x}$, produit d'un polynôme de degré 0 et d'une exponentielle dont le coefficient -2 de l'argument est solution simple de l'équation caractéristique, il existe une solution de la forme $f_P(x) = Ax\ e^{-2x}$ où A doit être déterminé. Puisque $Df_P(x) = A\ e^{-2x} - 2Ax\ e^{-2x}$, on a

$$2Df_P(x) + 4f_P(x) = e^{-2x} \Leftrightarrow (2A - 4Ax)e^{-2x} + 4Ax\ e^{-2x} = e^{-2x} \Leftrightarrow 2A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, on obtient une solution particulière

$$f_P(x) = \frac{x}{2}e^{-2x},\ x \in \mathbb{R}$$

et les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$f(x) = (C + \frac{x}{2})\ e^{-2x},\ x \in \mathbb{R}$$

où C est une constante arbitraire complexe.

4. Résolvons l'équation d'ordre 1 homogène $Df(t) + f(t) = 0$. L'équation caractéristique est $z+1 = 0$ et son seul zéro est -1. Dès lors, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$f_H(t) = C\ e^{-t},\ t \in \mathbb{R}$$

où C est une constante arbitraire complexe.

Cherchons à présent une solution particulière sur $\mathbb{R}$ puisque le second membre $t \mapsto g(t) = \dfrac{1}{1+e^{2t}}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Vu l'expression de $g(t)$, nous utiliserons la méthode de variation des constantes.
La solution de $C(t)\ e^{-t} = \dfrac{1}{1+e^{2t}}$ est $C(t) = \dfrac{e^t}{1+e^{2t}}$; calculons, sur $\mathbb{R}$, une primitive de la fonction $t \mapsto C(t)$. Par une primitivation par substitution, on a

$$\int \frac{e^t}{1+e^{2t}}\ dt = \left[\int \frac{1}{1+u^2}\ du\right]_{u=e^t} \simeq [\arctan(u)]_{u=e^t} \simeq \arctan(e^t)$$

et, ainsi, une solution particulière f_P est donnée par

$$f_P(x) = \arctan(e^t)\ e^{-t},\ t \in \mathbb{R}.$$

En conclusion, les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$f(t) = [C + \arctan(e^t)]\ e^{-t},\ t \in \mathbb{R}$$

où C est une constante arbitraire complexe.

5. Résolvons l'équation d'ordre 2 homogène $D^2f(x) + Df(x) = 0$. L'équation caractéristique est $z^2 + z = 0$ dont les zéros sont -1 et 0. Dès lors, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$f_H(x) = C_1\ e^{0x} + C_2\ e^{-x} = C_1 + C_2\ e^{-x},\ x \in \mathbb{R}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes.

Cherchons à présent une solution particulière sur $\mathbb{R}$ puisque le second membre $x \mapsto g(x) = x\ e^x$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Comme g est une exponentielle polynôme, produit d'un polynôme du premier degré et d'une exponentielle dont le coefficient 1 de l'argument n'est pas solution de l'équation caractéristique, il existe une solution de la forme $f_P(x) = (Ax+B)\ e^x$ où A et B doivent être déterminés. Puisque $Df_P(x) = A\ e^x + (Ax+B)\ e^x = (Ax+A+B)\ e^x$ et $D^2f(x) = A\ e^x + (Ax+A+B)\ e^x = (Ax+2A+B)\ e^x$, on a

$$D^2f_P(x) + Df_P(x) = x\ e^x \Leftrightarrow (2Ax+3A+2B)\ e^x = x\ e^x \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2A = 1 \\ 3A+2B = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{3}{4} \end{array}\right. .$$

Ainsi, on obtient une solution particulière

$$f_P(x) = \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right)\ e^x,\ x \in \mathbb{R}$$

et les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$f(x) = C_1 + C_2\ e^{-x} + \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right)\ e^x,\ x \in \mathbb{R}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes.

Déterminons la solution qui vaut 1 en 1 et dont la dérivée s'annule en 1 c'est-à-dire la solution f telle que $f(1) = 1$ et $Df(1) = 0$. Comme $Df(x) = -C_2\ e^{-x} + \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right)\ e^x$, on a

$$\left\{\begin{array}{l} f(1) = 1 \\ Df(1) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1 + C_2\ e^{-1} - \frac{1}{4}e = 1 \\ -C_2\ e^{-1} + \frac{1}{4}e = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1 = 1 \\ C_2 = \frac{e^2}{4} \end{array}\right. ;$$

la solution cherchée est donc la fonction

$$f(x) = 1 + \frac{e^{2-x}}{4} + \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right)\ e^x,\ x \in \mathbb{R}.$$

6. Résolvons l'équation d'ordre 2 homogène $D^2f(x) + 2Df(x) + f(x) = 0$. L'équation caractéristique est $z^2 + 2z + 1 = 0$ laquelle est équivalente à $(z+1)^2 = 0$, équation qui admet -1 comme zéro double. Dès lors, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$f_H(x) = (C_1x + C_2)\ e^{-x},\ x \in \mathbb{R}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes.

Cherchons une solution particulière sur $\mathbb{R}$ puisque le second membre $x \mapsto g(x) = 1 + \sin(x)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Comme g est une somme de deux fonctions, cherchons tout d'abord une solution particulière de $D^2f + 2Df + f = 1$; on voit immédiatement que la fonction constante 1 convient. Cherchons à présent une solution particulière de $D^2f(x) + 2Df(x) + f(x) = \sin(x)$. Comme l'équation est à coefficients réels et que $\sin(x) = \Im(e^{ix})$, une solution particulière sera donnée par la partie imaginaire d'une solution particulière de $D^2F(x) + 2DF(x) + F(x) = e^{ix}$. Le second membre de cette équation est l'exponentielle polynôme $1.e^{ix}$, produit d'un polynôme de degré 0 et d'une exponentielle dont le coefficient i de l'argument n'est pas solution de l'équation caractéristique. Il existe donc une solution de la forme $F(x) = A\ e^{ix}$ où A doit être déterminé. Puisque $DF(x) = Ai\ e^{ix}$ et $D^2f(x) = -A\ e^{ix}$, on a

$$D^2F(x) + 2DF(x) + F(x) = e^{ix} \Leftrightarrow (-A + 2Ai + A)\ e^{ix} = e^{ix} \Leftrightarrow 2iA = 1 \Leftrightarrow 2A = -i \Leftrightarrow A = -\frac{i}{2}.$$

Ainsi,

$$F(x) = -\frac{i}{2}\ e^{ix} = -\frac{i}{2}(\cos(x) + i\sin(x))$$

et, dès lors, une solution particulière f_P de l'équation de départ est

$$f_P(x) = 1 + \Im F(x) = 1 - \frac{1}{2}\cos(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

En conclusion, les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$f(x) = (C_1x + C_2)\ e^{-x} + 1 - \frac{1}{2}\cos(x),\ x \in \mathbb{R}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes.

7. Résolvons l'équation d'ordre 2 homogène $D^2f(x) + 4f(x) = 0$. L'équation caractéristique est $z^2 + 4 = 0$; elle est équivalente à l'équation $z^2 - 4i^2 = 0$ dont les zéros sont $2i$ et $-2i$. Dès lors, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$f_H(x) = C_1e^{2ix} + C_2e^{-2ix},\ x \in \mathbb{R}$$

où C_1, C_2 sont des constantes complexes ou, ce qui revient au même, les fonctions

$$f_H(x) = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x),\ x \in \mathbb{R}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes.

Cherchons à présent une solution particulière sur $\mathbb{R}$ puisque le second membre $x \mapsto g(x) = \cos(2x)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Les coefficients de l'équation étant réels et $\cos(2x)$ étant la partie réelle de e^{2ix}, une solution particulière sera donnée par la partie réelle d'une solution particulière de $D^2F(x) + 4F(x) = e^{2ix}$. Le second membre de cette équation s'écrit $1\ .\ e^{2ix}$, produit d'un polynôme de degré 0 et d'une exponentielle dont le coefficient $2i$ de l'argument est solution simple de l'équation caractéristique. Il existe donc une solution de la forme $F(x) = Ax\ e^{2ix}$ où A doit être déterminé. En appliquant la formule de Leibniz, on a

$$D^2F(x) = C_2^0D^0(Ax).D^2(e^{2ix}) + C_2^1D(Ax).D(e^{2ix}) + C_2^2D^2(Ax).D^0(e^{2ix}) = -4Axe^{2ix} + 4iAe^{2ix}$$

et

$$D^2F(x) + 4F(x) = e^{2ix} \Leftrightarrow (-4Ax + 4iA + 4Ax)\ e^{2ix} = e^{2ix} \Leftrightarrow 4iA = 1 \Leftrightarrow 4A = -i \Leftrightarrow A = \frac{-i}{4}.$$

Ainsi,

$$F(x) = \frac{-ix}{4}\ e^{2ix} = -\frac{ix}{4}(\cos(2x) + i\sin(2x))$$

et, dès lors, une solution particulière f_P de l'équation de départ est donnée par

$$f_P(x) = \Re F(x) = \frac{x}{4}\sin(2x), x \in \mathbb{R}.$$

En conclusion, les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$f(x) = C_1\cos(2x) + \left(C_2 + \frac{x}{4}\right)\sin(2x),\ x \in \mathbb{R}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes.

Cherchons la solution qui s'annule en 0, ainsi que sa dérivée c'est-à-dire la solution telle que $f(0) = 0$ et $Df(0) = 0$. Comme $Df(x) = -2C_1\sin(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + 2\left(C_2 + \frac{x}{4}\right)\cos(2x)$, on a

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ Df(0) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1 = 0 \\ 2C_2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{array}\right. ;$$

la solution cherchée est donc la fonction

$$f(x) = \frac{x}{4}\sin(2x),\ x \in \mathbb{R}.$$

8. Cet exercice est un des exemples résolus dans les notes de cours.

2.7 Solutions des exercices de la “liste type 2003/2004”

Exercice 1

Représentation graphique : points d'ordonnée positive du demi-cercle centré à l'origine et de rayon r.

Exercice 2

a) $f(x) = \frac{-i}{2}e^{2i(x-1)} + \frac{3i}{2},\ x \in \mathbb{R}.$

b) $f(x) = e^{-x}(c + \arctan(e^x)),\ x \in \mathbb{R},\ c$ constante complexe arbitraire.

c) $f(x) = \frac{1379}{1454} + \frac{8}{729}e^{9(1-x)} + \frac{x^2}{18} - \frac{x}{81},\ x \in \mathbb{R}.$

d) $f(x) = -\frac{1}{27}\sin(3x) + \frac{x}{9},\ x \in \mathbb{R}.$

e) $f(x) = (c_1x + c_2)e^{-\frac{x}{3}} + (\frac{x}{16} - \frac{3}{32})e^x + 1,\ x \in \mathbb{R},\ c_1$ et c_2 constantes complexes arbitraires.

f) $f(x) = (c_1x + c_2 + \frac{x^2}{18})e^{-\frac{x}{3}},\ x \in \mathbb{R},\ c_1$ et c_2 constantes complexes arbitraires.

g) $f(x) = (c_1 - \frac{1}{4}\ln(1+e^{-2x}))e^x + (c_2 - \frac{1}{4}\ln(1+e^{2x}))e^{-x},\ x \in \mathbb{R},\ c_1$ et c_2 constantes complexes arbitraires.

h) $f(x) = c_1e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)x} + c_2e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)x} - \frac{1+i}{2}e^x,\ x \in \mathbb{R},\ c_1$ et c_2 constantes complexes arbitraires.

i) $f(x) = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x) + \frac{1}{3}\cos(x),\ x \in \mathbb{R},\ c_1$ et c_2 constantes complexes arbitraires.

j) $f(x) = c_1\cos(2x) + (\frac{x}{8} + c_2)\sin(2x) + \frac{1}{8},\ x \in \mathbb{R},\ c_1$ et c_2 constantes complexes arbitraires.

2.8 Solutions des exercices de la “liste type 2004/2005”

Exercice 1

L'équation différentielle n'est pas linéaire.

Exercice 2

a) $f(x) = (-1 - \dfrac{3i}{2})e^{2i(1-x)} + \dfrac{3i}{2},\ x \in \mathbb{R}.$

b) $f(x) = (C - \ln(1 + e^{-x}))e^x,\ x \in \mathbb{R}$ où C est une constante complexe arbitraire.

c) $f(x) = (C + e^x - \ln(e^x + 1))e^{-2x},\ x \in \mathbb{R}$ où C est une constante complexe arbitraire.

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 4x + \dfrac{33}{2} - 12\ e^{\frac{1-x}{4}},\ x \in \mathbb{R}$

e) $f(x) = x - 2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right),\ x \in \mathbb{R}$

f) $f(x) = C_1e^{-2x} + \left(C_2 + \dfrac{x^2}{6} - \dfrac{x}{9}\right)e^x + \dfrac{e^{2x}}{4},\ x \in \mathbb{R}$ où C_1, C_2 sont des constantes complexes arbitraires.

g) $f(x) = C_1\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) + C_2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) + \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{3}\sin(x) + \dfrac{1}{30}\cos(2x),\ x \in \mathbb{R}$ où C_1, C_2 sont des constantes complexes arbitraires.

h) $f(x) = \left(C_1x + C_2 + \dfrac{x^2}{2}\right)e^{-2x},\ x \in \mathbb{R}$ où C_1, C_2 sont des constantes complexes arbitraires.

i) $f(x) = \left(C_1 - \dfrac{1}{4}\ln(e^{2x} + 1)\right)e^{-x} + \left(C_2 - \dfrac{1}{4}\ln(e^{-2x} + 1)\right)e^x,\ x \in \mathbb{R}$ où C_1, C_2 sont des constantes complexes arbitraires.

2.9 Exercices de base sur la liste 2 : approximations polynomiales

Dans cette section figurent quelques exercices de base (dont il a été question durant les années académiques mentionnées).

Dans tout ce qui suit, sauf mention du contraire, x est l'inconnue réelle.

Liste 2002/2003

1. Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre n au point x_0 pour chacune des fonctions données ci-dessous.

   $f(x) = x\sin(x), n = 3, x_0 = 0, \quad f(x) = \sqrt{1+x}, n = 2, x_0 = 0, \quad f(x) = \ln(x+1), n = 3, x_0 = 0$
   $f(x) = \ln(x), n = 2, x_0 = 2$

2. Estimer le reste de l'approximation polynomiale à l'ordre 2 et à l'ordre 3 en 0 de la fonction $f(x) = \sin(x),\ x \in \mathbb{R}$.

Liste 2003/2004

1. Déterminer l'approximation polynomiale de f à l'ordre n au point x_0 dans chacun des cas suivants.

$$\begin{array}{ll} f_1(x) = x^2\cos(x),\ x_0 = 0, n = 4 & f_2(x) = \tan(x),\ x_0 = \pi, n = 4 \\ f_3(x) = \tan(x),\ x_0 = \frac{\pi}{4}, n = 3 & f_4(x) = \sqrt{2x+1},\ x_0 = 0, n = 2 \\ f_5(x) = \ln(1-x^2),\ x_0 = 0, n = 2 & f_6(x) = x\ \mathrm{arcos}(x),\ x_0 = 0, n = 2 \end{array}$$

2. Estimer le reste de l'approximation polynomiale à l'ordre 2 en 0 de la fonction cos. Représenter la fonction et cette approximation dans le même repère orthonormé.

Liste 2004/2005

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre n en x_0 pour la fonction donnée explicitement.

$$\begin{array}{ll} f_1(x) = e^{-2x},\ x_0 = 0, n = 0, 1, 2, 3 & f_2(x) = xe^{-2x},\ x_0 = 0, n = 0, 1, 2, 3 \\ f_3(x) = \dfrac{1}{1+x^2},\ x_0 = 0, n = 0, 1, 2 & f_4(x) = \arctan(x),\ x_0 = 0, n = 0, 1, 2, 3 \\ f_5(x) = \ln(x),\ x_0 = 1, n = 0, 1, 2, 3 & f_6(x) = (1+x)^3,\ x_0 = 0, n = 0, 1, 2, 3, 4 \end{array}$$

   Représenter f_3 et son approximation à l'ordre 2 en 0.

2. Estimer le reste de l'approximation polynomiale à l'ordre 4 en 0 de la fonction sin. Représenter la fonction et cette approximation dans le même repère orthonormé.
3. — L'approximation à l'ordre 3 d'une fonction en un point est toujours
   □ un polynôme de degré 3
   □ une fraction rationnelle dont le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur
   □ un nombre réel plus petit ou égal à 3
   □ une fonction
   □ aucune des propositions précédentes n'est correcte.

2.10 Résolution des exercices de la "liste type 2002/2003"

Exercice 1

— La fonction $x \mapsto f(x) = x\sin(x)$ est indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$Df(x) = \sin(x) + x\cos(x),\ D^2f(x) = 2\cos(x) - x\sin(x),\ D^3f(x) = -3\sin(x) - x\cos(x)$$

sur $\mathbb{R}$, donc

$$f(0) = 0, \quad Df(0) = 0, \quad D^2f(0) = 2, \quad D^3f(0) = 0.$$

Dès lors, l'approximation demandée est le polynôme

$$P_3(x) = f(0) + x\ Df(0) + \frac{x^2}{2}\ D^2f(0) + \frac{x^3}{6}\ D^3f(0) = x^2.$$

— La fonction $x \mapsto f(x) = \sqrt{1+x}$ est indéfiniment continûment dérivable sur $]-1, +\infty[$ et on a

$$Df(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}, \quad D^2f(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$$

sur $]-1, +\infty[$, donc

$$f(0) = 1, \quad Df(0) = \frac{1}{2}, \quad D^2f(0) = -\frac{1}{4}.$$

Dès lors, l'approximation demandée est le polynôme

$$P_2(x) = f(0) + x\ Df(0) + \frac{x^2}{2}\ D^2f(0) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}.$$

— La fonction $x \mapsto f(x) = \ln(x+1)$ est indéfiniment continûment dérivable sur $]-1, +\infty[$ et on a

$$Df(x) = (x+1)^{-1},\ D^2f(x) = -(x+1)^{-2},\ D^3f(x) = 2(x+1)^{-3}$$

sur $]-1, +\infty[$, donc

$$f(0) = 0, \quad Df(0) = 1, \quad D^2f(0) = -1, \quad D^3f(0) = 2.$$

Dès lors, l'approximation demandée est le polynôme

$$P_3(x) = f(0) + x\ Df(0) + \frac{x^2}{2}\ D^2f(0) + \frac{x^3}{6}\ D^3f(0) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

— La fonction $x \mapsto f(x) = \ln(x)$ est indéfiniment continûment dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a

$$Df(x) = x^{-1}, \quad D^2f(x) = -x^{-2}$$

sur $]0, +\infty[$, donc

$$f(2) = \ln(2), \quad Df(2) = \frac{1}{2}, \quad D^2f(2) = -\frac{1}{4}.$$

Dès lors, l'approximation demandée est le polynôme

$$P_2(x-2) = f(2) + (x-2)\ Df(2) + \frac{(x-2)^2}{2}\ D^2f(2) = \ \ln(2) + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{8}.$$

Exercice 2

La fonction $x \mapsto f(x) = \sin(x)$ étant réelle et indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, vu le développement limité de Taylor, on sait que le reste de l'approximation polynomiale à l'ordre 2 est $R_2(x) = \dfrac{x^3}{6}D^3f(u_0),\ x \in \mathbb{R}$ et u_0 strictement compris entre 0 et x.
Puisque $Df(x) = \cos(x),\ D^2f(x) = -\sin(x)$ et $D^3f(x) = -\cos(x)$, on a

$$R_2(x) = -\frac{x^3}{6}\cos(u_0) \qquad \text{et} \qquad |R_2(x)| \le \frac{|x|^3}{6},\ x \in \mathbb{R}.$$

De même, le reste de l'approximation à l'ordre 3 est $R_3(x) = \dfrac{x^4}{24}\ D^4 f(u_0) = \dfrac{x^4}{24}\ \sin(u_0),\ x \in \mathbb{R}$ et u_0 strictement compris entre 0 et x puisque $D^4 f(x) = \sin(x)$. Mais comme l'approximation de la fonction sinus à l'ordre 4 est la même que l'approximation à l'ordre 3, en utilisant le développement de Taylor, on obtient

$$R_3(x) = R_4(x) = \frac{x^5}{120} D^5 f(u_0) = \frac{x^5}{120}\cos(u_0) \qquad \text{et} \qquad |R_3(x)| \leq \frac{|x|^5}{120},\ x \in \mathbb{R}.$$

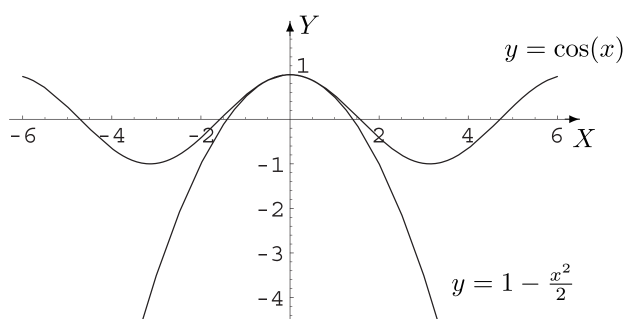
2.11 Solutions des exercices de la "liste type 2003/2004"

Exercice 1

$f_1 : P_4(x) = x^2 - \frac{x^4}{2},\ x \in \mathbb{R}.$
$f_2 : P_4(x-\pi) = x - \pi + \frac{(x-\pi)^3}{3},\ x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[.$
$f_3 : P_3(x - \frac{\pi}{4}) = 1 + 2(x - \frac{\pi}{4}) + 2(x - \frac{\pi}{4})^2 + \frac{8}{3}(x - \frac{\pi}{4})^3,\ x \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$
$f_4 : P_2(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2},\ x \in] - \frac{1}{2}, +\infty[.$
$f_5 : P_2(x) = -x^2,\ x \in] - 1, 1[.$
$f_6 : P_2(x) = \frac{\pi}{2}x - x^2,\ x \in] - 1, 1[.$

Exercice 2

$R_2(x) = \frac{x^3}{6}\sin(u)$ avec u strictement compris entre 0 et x ; on a donc $|R_2(x)| \leq \frac{x^3}{6},\ x \in \mathbb{R}.$

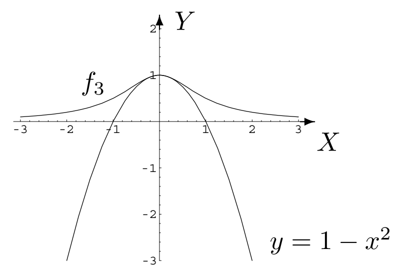


2.12 Solutions des exercices de la "liste type 2004/2005"

Exercice 1

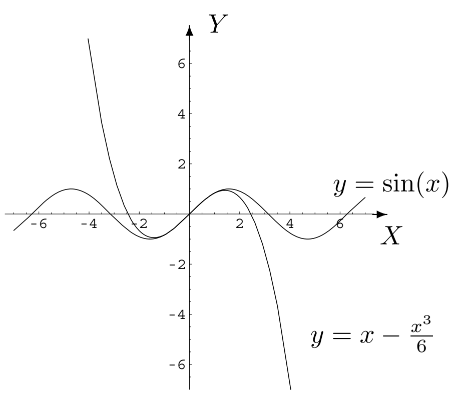
	$P_0(x-x_0)$	$P_1(x-x_0)$	$P_2(x-x_0)$	$P_3(x-x_0)$	$P_4(x-x_0)$
f_1	1	$1-2x$	$1-2x+2x^2$	$1-2x+2x^2-\dfrac{4}{3}x^3, x \in \mathbb{R}$	
f_2	0	x	$x-2x^2$	$x-2x^2+2x^3, x \in \mathbb{R}$	

	$P_0(x-x_0)$	$P_1(x-x_0)$	$P_2(x-x_0)$	$P_3(x-x_0)$	$P_4(x-x_0)$
f_3	1	1	$1-x^2, x\in\mathbb{R}$		
f_4	0	x	x	$x-\dfrac{x^3}{3}, x\in\mathbb{R}$	
f_5	0	$x-1$	$x-1-\dfrac{(x-1)^2}{2}$	$x-1-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}, x\in]0,+\infty[$	
f_6	1	$1+3x$	$1+3x+3x^2$	$1+3x+3x^2+x^3$	$1+3x+3x^2+x^3, x\in\mathbb{R}$

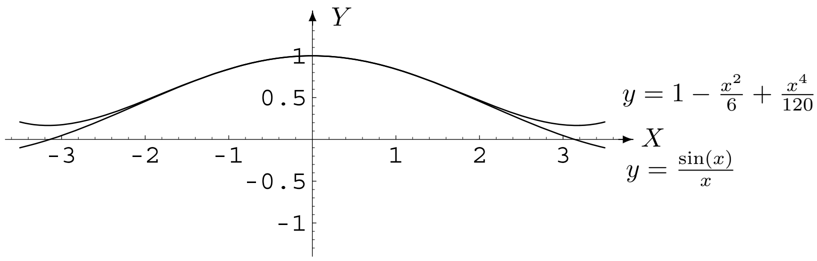


Exercice 2

$R_4(x) = \cos(u_0)\dfrac{x^5}{5!}$ avec u_0 strictement compris entre 0 et x.
Approximation : $P_4(x) = x - \dfrac{x^3}{6}, x \in \mathbb{R}$.



$R_4(x) = \dfrac{x^5}{5\,!}(u_0^5\cos(u_0) - 5\ u_0^4\sin(u_0) - 20\ u_0^3\cos(u_0) + 60\ u_0^2\sin(u_0) + 120\ u_0\cos(u_0) - 120\ \sin(u_0))\ .\ u_0^{-6}$
avec u_0 strictement compris entre 0 et x.
Approximation : $P_4(x) = 1 - \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^4}{120}, x \in \mathbb{R}$.



Exercice 3

une fonction.

2.13 Exercices de base sur la liste 2 : calcul intégral à une variable

Dans cette section figurent quelques exercices de base (dont il a été question durant les années académiques mentionnées).

Liste 2002-2003

1. Calculer les intégrales suivantes

$$\int_1^2 \sqrt{x}\ dx \qquad \int_0^1 xe^{-x}\ dx \qquad \int_0^{2\pi} \sin^2(y)\ dy$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx \qquad \int_0^1 \ln(t)\ dt \qquad \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \qquad \int_0^{+\infty} x^2 e^{-2x}\ dx \qquad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-1} dx$$

2. Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par les graphiques des fonctions f, g, h données explicitement par $f(x) = x^2$, $\quad g(x) = x$, $\quad h(x) = 2x$ et donner une représentation graphique de cette région du plan.

Liste 2003-2004

1. Pour chacun des cas suivants, déterminer si l'intégrale de f sur A existe (c'est-à-dire si $\int_A f(x)\ dx$ représente bien un nombre)

$$f(x) = \sin(\sqrt{x}),\ A = [0,1] \qquad f(x) = \frac{x}{1+x^2},\ A =]-\infty, 0] \qquad \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$$

$$\int_0^1 \ln(x^2)\ dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx \qquad \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x^2}$$

2. Calculer les intégrales suivantes (si c'est possible)

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2(x)} dx \qquad \int_{1/2}^3 \sqrt{1+x}\ dx \qquad \int_{-1}^2 x^2 e^{-x} dx \qquad \int_0^\pi x\cos^2(x)\ dx$$

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^3}\ dx \qquad \int_0^1 \ln(x^2)\ dx \qquad \int_{-1}^0 \arcsin(x)\ dx \qquad \int_{-1}^0 x \arcsin(x)\ dx$$

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right)\ dx \qquad \int_{-2}^4 \frac{x+4}{x+3} dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{4x^2+9} dx \qquad \int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{4x^2-9} dx$$

3. Calculer l'aire de la partie du plan dont une description analytique est la suivante
$$\{(x,y) : x \in [0,2\pi],\ \cos(x) \leq y \leq \sin(x)\}.$$
Donner aussi une représentation graphique de cet ensemble.
4. La vitesse d'une voiture, partant de l'origine O et se déplaçant en ligne droite suivant l'axe X est $v(t) = 10t - t^2,\ t \in [0,10]$. Déterminer la position $x(t)$ de la voiture au temps $t \in [0,10]$. Déterminer également quand l'accélération est nulle.

Liste 2004/2005

1. a) Pour chacun des cas suivants, déterminer si f est intégrable sur A.
$$f(x) = \cos(\sqrt{|x|}),\ A = [-1,1];\ f(x) = \frac{x^2}{1+x^4},\ A = \mathbb{R};\ f(x) = \frac{1}{x^3},\ A =]0,1] \text{ et } A = [1,+\infty[.$$
b) Calculer les intégrales suivantes (si c'est possible)
$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^2(x)\ dx \quad \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{\cos^2(x)}\ dx \quad \int_{1/2}^{3} \sqrt{3-x}\ dx \quad \int_{-1}^{1} xe^{-x}\ dx \quad \int_{0}^{\pi} x\cos(x)\ dx$$
$$\int_{-1}^{1} \ln(x^2)\ dx \quad \int_{-2}^{4} \frac{x+4}{x+3}\ dx \quad \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{4x^2+9}\ dx \quad \int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{4x^2-9}\ dx \quad \int_{0}^{1} \frac{x}{1+x^2}\ dx$$
2. Calculer l'aire de la partie du plan dont une description analytique est la suivante
$$\left\{(x,y) : x \in [-1,1], y \in \mathbb{R} \text{ et } \sin^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) \leq y \leq \cos^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right\}.$$
Donner aussi une représentation graphique de cet ensemble.
3. Calculer (si possible)
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+1} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+x-2} dx \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2+x-2} dx$$
4. La vitesse à laquelle s'accroît une population de virus est donnée au cours du temps par la fonction $\exp(3t),\ t \geq 0$.
a) Avec ces données, est-il possible de déterminer la population au temps 0 ? Pourquoi ?
Si la réponse est "oui", déterminer cette population.
b) Sachant qu'au départ la population était égale à 1 (million d'individus), déterminer la population au temps $t = 1$.
5. A proposer aux étudiants
   (a) Si la somme de deux fonctions f, g est intégrable sur $[0,1]$ alors l'intégrale de la somme $f+g$ est égale à la somme des intégrales de f et g. Vrai□ Faux□
   (b) Si f, g sont deux fonctions continues et intégrables sur $[0,+\infty[$ alors
   a) toute combinaison linéaire de f et g est aussi intégrable sur$[0,+\infty[$
   b) l'intégrale d'une combinaison linéaire de f et g est égale à la combinaison linéaire des intégrales.
   Exprimer mathématiquement la partie b) du résultat énoncé ci-dessus.
   (c) Une fonction continue sur $[0,2[$ est toujours intégrable sur $[0,2[$ Vrai□ Faux□
   (d) Une fonction continue sur $[0,2[$ est toujours intégrable sur $[0,1]$ Vrai□ Faux□
   (e) Qu'appelle-t-on largeur d'un découpage ?
   (f) On donne le découpage suivant de l'intervalle $[0,1]$:
   $$0, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1.$$
   Que vaut la largeur de ce découpage ?
   (g) Si on augmente le nombre de points d'un découpage, on diminue toujours sa largeur.
   Vrai□ Faux□

2.14 Résolution des exercices de la "liste type 2002/2003"

Exercice 1

— Comme $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est une fonction continue sur $[1,2]$, ensemble borné et fermé, elle y est intégrable et on a

$$\int_1^2 \sqrt{x}\ dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_1^2 = \frac{2}{3}(\sqrt{8}-\sqrt{1}) = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

— Comme $f : x \mapsto x\ e^{-x}$ est une fonction continue sur $[0,1]$, ensemble borné et fermé, elle y est intégrable et on a

$$\int_0^1 x\ e^{-x}\ dx = \int_0^1 xD(-e^{-x})\ dx = [-x\ e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\ dx = -e^{-1} - [e^{-x}]_0^1 = -2e^{-1}+1 = 1-\frac{2}{e}.$$

— Comme $f : y \mapsto \sin^2(y) = \dfrac{1-\cos(2y)}{2}$ est une fonction continue sur $[0,2\pi]$, ensemble borné et fermé, elle y est intégrable et on a

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(y)\ dy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1\ dy - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(2y)\ dy = \frac{1}{2}[y]_0^{2\pi} - \frac{1}{4}[\sin(2y)]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\ .\ 2\pi = \pi.$$

— Comme $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est une fonction continue sur $]0,1]$, ensemble borné non fermé, on doit étudier l'intégrabilité en 0. Puisque $\dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$, $s = \frac{1}{2}$ étant strictement inférieur à 1, la fonction est intégrable en 0, donc sur $]0,1]$ et on a

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}\ dx = [2\sqrt{x}]_0^1 = 2.$$

— Comme $f : t \mapsto \ln(t)$ est une fonction continue sur $]0,1]$, ensemble borné non fermé, on doit étudier l'intégrabilité en 0. Considérons $\lim\limits_{t\to 0^+} (t^{\frac{1}{2}}\ln(t))$ et levons l'indétermination "$0\ .\ \infty$" par application du théorème de l'Hospital.
Soit $V =]0,\varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit. Les fonctions $t \mapsto \ln(t)$ et $t \mapsto t^{-\frac{1}{2}}$ sont dérivables dans V et $Dt^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}} \neq 0\ \forall t \in V$. De plus, on a

$$\lim_{t\to 0^+} (t^{\frac{1}{2}}\ln(t)) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln(t)}{t^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{D(\ln(t))}{D(t^{-\frac{1}{2}})} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^{-1}}{-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}} = -2\lim_{t\to 0^+} t^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Dès lors, $\lim\limits_{t\to 0^+} (t^{\frac{1}{2}}\ln(t)) = 0$ et puisque cette limite existe et est finie, le critère d'intégration en θ (avec $\theta = \frac{1}{2} < 1$) permet d'affirmer que la fonction est intégrable en 0 et donc sur $]0,1]$. Ainsi,

$$\int_0^1 \ln(t)\ dt = \int_0^1 D(t)\ .\ \ln(t)\ dt = [t\ \ln(t)]_0^1 - \int_0^1 t\ .\ \frac{1}{t}\ dt = -[t]_0^1 = -1.$$

Autre méthode : la fonction f étant continue et négative sur l'intervalle d'intégration, on peut vérifier son intégrabilité en 0 et calculer la valeur de son intégrale par application de la définition. Si la limite $\lim\limits_{x\to 0^+}\displaystyle\int_x^1 \ln(t)\,dt$ est finie alors f est intégrable en 0 donc sur $]0,1]$ et la valeur de cette limite est aussi la valeur de l'intégrale.
Comme

$$F(x) = \int_x^1 \ln(t)\,dt = [t\ln(t) - t]_x^1 = -1 - x\ln(x) + x$$

et

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = -1 - \lim_{x\to 0^+}(x\ln(x)) = -1 - \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{x^{-1}},$$

on lève l'indétermination "$\frac{\infty}{\infty}$" par application du théorème de l'Hospital (les hypothèses étant vérifiées). Ainsi, puisque

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{D\ln(x)}{D(x^{-1})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0,$$

f est intégrable sur $]0,1]$ et son intégrale vaut -1.

— Comme $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est une fonction continue sur $[0,1]$, ensemble borné et fermé, elle y est intégrable. Si on effectue le changement de variables $g : t \mapsto x = \sin(t)$ entre $]0,\pi/2[$ et $]0,1[$, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)}\ \cos(t)\ dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2(t)}\ \cos(t)\ dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\ dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\ dt \\
&= \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

puisque $\cos(t) \geq 0$ si $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

— Comme $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est une fonction paire continue sur $\mathbb{R}$, ensemble non borné, il suffit de vérifier l'intégrabilité en $+\infty$. Pour cela, calculons $\lim_{x\to+\infty} \left(x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2}\right)$. Cette limite existe et est finie puisqu'elle vaut 1. Dès lors, par le critère d'intégration en θ avec $\theta = 2 > 1$, cela prouve que f est intégrable en $+\infty$. Ainsi,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\ dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\ dx = 2[\arctan(x)]_0^{+\infty} = 2\,(\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) - \arctan(0)) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi.$$

— Comme $f : x \mapsto x^2\ e^{-2x}$ est une fonction continue sur $[0,+\infty[$, ensemble non borné, on doit étudier l'intégrabilité en $+\infty$. Considérons $\lim_{x\to+\infty} (x^2 \cdot x^2 e^{-2x}) = \lim_{x\to+\infty} (x^4 \cdot e^{-2x})$; cette limite vaut 0 car "à l'infini, la fonction exponentielle domine toute puissance antagoniste de x". Puisque cette limite existe et est finie, le critère d'intégration en θ (avec $\theta = 2 > 1$) permet d'affirmer que la fonction est intégrable en $+\infty$ et donc finalement sur $[0,+\infty[$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} x^2\ e^{-2x}\ dx &= \int_0^{+\infty} x^2\ D\left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right)\ dx \\
&= \left[-\frac{x^2\ e^{-2x}}{2}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x\ e^{-2x}\ dx \\
&= 0 + \int_0^{+\infty} x\ D\left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right)\ dx \\
&= \left[-\frac{x\ e^{-2x}}{2}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-2x}\ dx \\
&= 0 - \frac{1}{4}\left[e^{-2x}\right]_0^{+\infty} \\
&= -\frac{1}{4}\ (\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} - 1) \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

— Comme $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$ est une fonction continue sur $[2,+\infty[$, ensemble non borné, on doit étudier l'intégrabilité en $+\infty$. Considérons $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2 \cdot \dfrac{1}{x^2-1}\right)$. Cette limite existe et est finie puisqu'elle vaut 1, ce qui prouve, par le critère d'intégration en θ avec $\theta = 2 > 1$, que f est intégrable en $+\infty$ donc finalement sur $[2,+\infty[$. Calculons tout d'abord une primitive de f en décomposant cette fonction en une somme de fractions simples. On a, pour tout $x \neq \pm 1$,

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)},$$

ce qui donne

$$(A+B)x + (A-B) = 1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A+B=0 \\ A-B=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

et donc, si $x \geq 2$

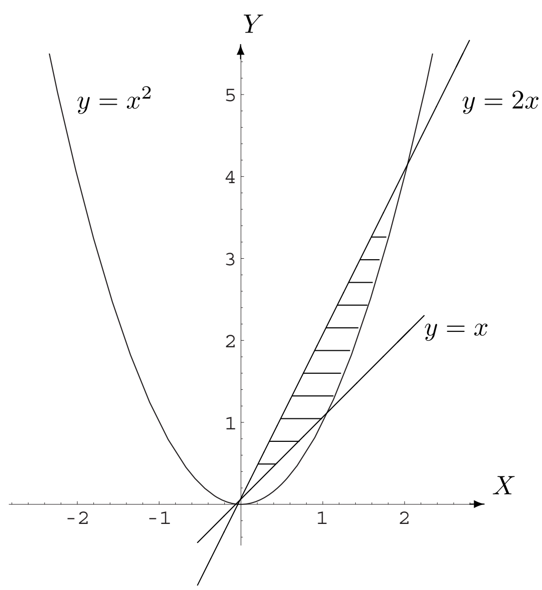
$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx \simeq \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x+1) \simeq \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right).$$

Ainsi,

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\left[\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - \ln\left(\frac{2-1}{2+1}\right)\right] = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\ln(3).$$

Exercice 2

Représentons graphiquement la région dont on veut calculer l'aire.



Si $f(x) = x^2$, $g(x) = x$ et $h(x) = 2x$, d'une part, les points d'intersection des graphiques de f et g ont pour coordonnées $(0,0)$ et $(1,1)$; d'autre part, les points d'intersection des graphiques de f et h ont pour coordonnées $(0,0)$ et $(2,4)$. Ainsi, puisque les fonctions à intégrer sont continues sur tout intervalle fermé et borné, on a

$$\begin{aligned}
\text{Aire} &= \int_0^1 (2x-x)\ dx + \int_1^2 (2x-x^2)\ dx \\
&= \int_0^1 x\ dx + \int_1^2 (2x-x^2)\ dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{2} + \left[(4-\frac{8}{3}) - (1-\frac{1}{3})\right] \\
&= \frac{1}{2} + 3 - \frac{7}{3} \\
&= \frac{3+18-14}{6} \\
&= \frac{7}{6}.
\end{aligned}$$

2.15 Solutions des exercices de la "liste type 2003/2004"

Exercice 1

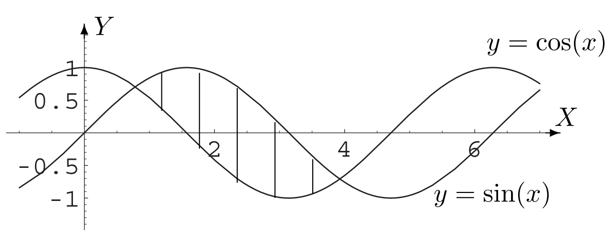
$f(x) = \sin(\sqrt{x})$: intégrable sur A.
$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$: non intégrable en $-\infty$ donc non intégrable sur A.
$f(x) = \frac{1}{x^2}$: non intégrable en 0 donc non intégrable sur$[-1,1]$.
$f(x) = \ln(x^2)$: intégrable sur $]0,1]$.
$f(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}$: intégrable sur $]0,+\infty[$.
$f(x) = \frac{\ln(x)}{1-x^2}$: intégrable sur $]0,1[$.

Exercice 2

1	$\frac{16}{3} - \frac{\sqrt{6}}{2}$	$-10e^{-2}+e$	$\frac{\pi^2}{4}$
$\frac{1}{3}$	-2	$1-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{8}$
non intégrable en $+\infty$	$6+\ln(7)$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{1}{12}\ln(7)$

Exercice 3

Aire $= 2\sqrt{2}$.



Exercice 4

$x(t) = 5t^2 - \frac{t^3}{3},\ t \in [0,10]$.

Accélération nulle si $t = 5$.

2.16 Solutions des exercices de la "liste type 2004/2005"

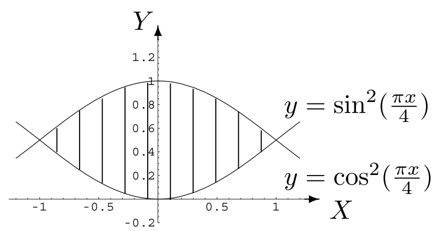
Exercice 1

Les deux premières fonctions sont intégrables sur A, la troisième est intégrable sur $[1, +\infty[$ mais non sur $]0, 1]$.

$\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)$	$\sqrt{3}-1$	$\frac{5}{6}\sqrt{10}$	$\frac{-2}{e}$	-2
-4	$6+\ln(7)$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{1}{12}\ln(7)$	$\frac{1}{2}\ln(2)$

Exercice 2

L'aire hachurée vaut $\frac{4}{\pi}$.



Exercice 3

La première intégrale vaut $\dfrac{2\sqrt{3}\pi}{9}$ et la troisième $\dfrac{1}{3}\ln(4)$.
La deuxième fonction n'est pas intégrable en 1.

Exercice 4

a) Non, la population est définie à une constante additive près.
b) $P(1) = \dfrac{e^3}{3} + \dfrac{2}{3}$.

Exercice 5

Faux, a) vrai b) $\forall r, s \in \mathbb{R} : \int_0^{+\infty}(rf(x)+sg(x))dx = r\int_0^{+\infty} f(x)\ dx + s\int_0^{+\infty} g(x)\ dx$, faux, vrai, cf. notes de cours, la largeur de ce découpage vaut $\frac{1}{2}$, faux.

Chapitre 3

Calcul matriciel

3.1 Exercices de base sur les listes 3-4

Dans cette section figurent quelques exercices de base (dont il a été question durant les années académiques mentionnées).

Liste 2002-2003

1. Soient les matrices
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 2 & i+1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & -i \\ \frac{1}{i} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Calculer (si possible)
$$iA,\ A+B,\ A+\widetilde{B},\ AA^*,\ AB,\ BA, B\overline{B}.$$

2. Calculer le déterminant des matrices suivantes.
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i & i \\ -i & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Factoriser le déterminant des matrices suivantes.
$$\begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & 1-x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x & x^2 & x^3 \\ y & y^2 & y^3 \\ z & z^2 & z^3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -a-x & a & 0 \\ b & -2b-x & b \\ 0 & a & -a-x \end{pmatrix}$$

4. Calculer (si elle existe) la matrice inverse de chacune des matrices suivantes.
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Pourquoi ? Si elles le sont, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. QCM + justifier la réponse
   - Si A est une matrice carrée telle que $A^2 = 0$, alors A est la matrice nulle Vrai☐ Faux☐
   - Le déterminant d'une matrice carrée dont les éléments sont des complexes est
     un complexe☐ une matrice☐ un polynôme☐ aucune proposition correcte☐
   - Si A et B sont des matrices carrées de même dimension qui vérifient $AB = A$, alors B est la matrice identité Vrai☐ Faux☐
   - Si A est une matrice qui vérifie $A = A^*$, si $c \in \mathbb{C}$ et si on pose $B = cA$, alors $B = B^*$ Vrai☐ Faux☐
   - Si M est une matrice qui vérifie $M\widetilde{M} = \mathbb{1}$, alors M admet un inverse Vrai☐ Faux☐
   - Si A, B sont deux matrices de même format, alors on a $A + B = B + A$ Vrai☐ Faux☐
   - Si A, B sont deux matrices carrées de même dimension, alors on a $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ Vrai☐ Faux☐
   - Les valeurs propres d'une matrice carrée réelle sont toujours des nombres réels Vrai☐ Faux☐
   - Une matrice carrée peut être inversible et avoir une valeur propre nulle Vrai☐ Faux☐
   - La somme de deux vecteurs propres de même valeur propre est encore un vecteur propre de même valeur propre Vrai☐ Faux☐

Liste 2003-2004

1. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2i \\ \frac{-1}{i^3} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 2 & i+1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -i+2 & 3 \\ 4i & -i \end{pmatrix}.$$

   Si possible, effectuer les opérations suivantes. Si cela ne l'est pas, en expliquer la raison.

$$iA,\ C^*,\ A+B,\ A+\widetilde{B},\ AA^*,\ AB,\ BA,\ CB,\ CA.$$

2. Calculer le plus rapidement possible le déterminant de chacune des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} i & -1 \\ -2 & 5i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Le déterminant de la matrice suivante est un polynôme en x. Factoriser ce polynôme.

$$\begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 2 & 2-x \end{pmatrix}.$$

4. Calculer (si elle existe) la matrice inverse de chacune des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & 2i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Pourquoi ? Si elle le sont, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Répondre aux questions suivantes et justifier la réponse.
   - Si A est une matrice carrée telle que $A^2 = 0$, alors A est la matrice nulle Vrai☐ Faux☐
   - Si M est une matrice qui vérifie $M\widetilde{M} = \mathbb{1}$, alors M admet un inverse Vrai☐ Faux☐

- Si A, B sont deux matrices de même format, alors on a $A+B=B+A$ Vrai☐ Faux☐
- Si A, B sont deux matrices carrées de même dimension, alors on a $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$ Vrai☐ Faux☐
- Les valeurs propres d'une matrice carrée réelle sont toujours des nombres réels Vrai☐ Faux☐
- Une matrice carrée peut être inversible et avoir une valeur propre nulle Vrai☐ Faux☐
- La somme de deux vecteurs propres de même valeur propre est encore un vecteur propre de même valeur propre Vrai☐ Faux☐
- La somme de deux valeurs propres d'une même matrice est encore une valeur propre de cette matrice Vrai☐ Faux☐
- Si le complexe λ_0 est une valeur propre de la matrice M alors $\overline{\lambda_0}$ est une valeur propre de la matrice $\overline{M}$ Vrai☐ Faux☐
- Si un complexe est une valeur propre d'une matrice, alors il est aussi valeur propre de la matrice transposée Vrai☐ Faux☐

Liste 2004/2005

1. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2i & 2i^4 & \dfrac{(1+i)^2}{i^3} \\ 0 & -1 & 1-i \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 2 & i+1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -3i+1 & 3 \\ 4i & -i \end{pmatrix}.$$

   Si possible, effectuer les opérations suivantes. Si cela ne l'est pas, en expliquer la raison.

$$\widetilde{iA},\ (iB)^*,\ A+B,\ A+\widetilde{B},\ AA^*,\ AB,\ BA,\ CB.$$

2. Déterminer la forme générale des matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (resp. avec la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$).
3. Calculer le plus rapidement possible le déterminant de chacune des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} i+1 & 1 \\ -2i & 5 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Le déterminant des matrices suivantes est un polynôme en x. Factoriser ce polynôme en un produit de facteurs du premier degré.

$$\begin{pmatrix} 2-x & -4 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2-x & -4 \\ -1 & x+1 \end{pmatrix}.$$

5. Calculer (si elle existe) la matrice inverse de chacune des matrices suivantes (on donne $\alpha \in \mathbb{R}$).

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Pourquoi ? Si elles le sont, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & i+1 \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Répondre aux questions suivantes et justifier la réponse.
   - Si A est une matrice carrée telle que $A^2 = A$, alors A est la matrice nulle ou est la matrice identité
     Vrai☐ Faux☐
   - Si M est une matrice carrée qui vérifie $M\widetilde{M} = \mathbb{1}$, alors M vérifie aussi $\widetilde{M}M = \mathbb{1}$
     Vrai☐ Faux☐
   - Si A, B sont deux matrices de même format, alors on a $A(A+B) = A^2 + AB$ Vrai☐ Faux☐
   - Si A, B sont deux matrices carrées de même dimension, alors on a $A^2 - B^2 = (A-B)\,(A+B)$
     Vrai☐ Faux☐
   - Une matrice carrée peut être inversible et avoir une valeur propre nulle Vrai☐ Faux☐
   - La somme de deux vecteurs propres de même valeur propre est encore un vecteur propre de même valeur propre Vrai☐ Faux☐
   - La somme de deux vecteurs propres de valeur propre nulle est encore un vecteur propre de valeur propre nulle Vrai☐ Faux☐
   - La trace du produit de deux matrices carrées de même dimension reste la même si on permute l'ordre des facteurs du produit.

3.2 Résolution des exercices de la "liste type 2002/2003"

Exercice 1

• On a

$$iA = \begin{pmatrix} i & 0 & -i \\ -1 & 2i & -1+i \end{pmatrix}.$$

• La matrice A est une matrice de format 2×3 tandis que B est une matrice de format 3×2. Ces matrices n'ayant pas le même format, il est impossible de les additionner.

• Puisque B est une matrice de format 3×2, $\widetilde{B}$ est de format 2×3 et peut être additionné à A, matrice de même format. On a

$$A + \widetilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 2 & 1+i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{i} & -1 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{i} & -2 \\ 0 & 2 & 2+i \end{pmatrix}.$$

• Puisque A est une matrice de format 2×3, A^* est une matrice de format 3×2 ; le produit AA^* est donc possible et donne une matrice de format 2×2. On a

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 2 \\ -1 & 1+i \end{pmatrix} \text{ donc } A^* = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 2 \\ -1 & 1-i \end{pmatrix};$$

ainsi,

$$AA^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 2 & 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 2 \\ -1 & 1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

• Le produit AB est possible puisque A est de format 2×3 et B de format 3×2 ; le produit est une matrice de format 2×2. On a

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 2 & 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1-i \\ -1-2i & 2+i \end{pmatrix}.$$

• Le produit BA est possible puisque B est de format 3×2 et A de format 2×3 ; le produit est une matrice de format 3×3. On a

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 2 & 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2i & -i \\ -i & 0 & i \\ -1+i & 2 & 2+i \end{pmatrix}.$$

• Le nombre de colonnes de B est différent du nombre de lignes de $\overline{B}$; le produit $B\overline{B}$ est donc impossible.

Exercice 2

• On a $\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = 1.5 - (-1).(-2) = 3.$

• On a $\det\begin{pmatrix} i & i \\ -i & i \end{pmatrix} = i^2 + i^2 = -2.$

• On a

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} && \text{si on remplace } L_1 \text{ par } L_1 + L_3 \\
&= (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 && \text{en développant le déterminant selon la première ligne.}
\end{aligned}$$

Exercice 3

• On a $\det\begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & 1-x \end{pmatrix} = (1-x)^2 - 4 = (1-x-2)(1-x+2) = (-x-1)(3-x).$

• On a

$$\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix} x & x^2 & x^3 \\ y & y^2 & y^3 \\ z & z^2 & z^3 \end{pmatrix} \\
= \;& xyz\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} && \text{mise en évidence du facteur } x \text{ sur } L_1,\ y \text{ sur } L_2 \text{ et } z \text{ sur } L_3 \\
= \;& xyz\begin{vmatrix} 0 & x-z & x^2-z^2 \\ 0 & y-z & y^2-z^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} && \text{si on remplace } L_1 \text{ par } L_1 - L_3 \text{ et } L_2 \text{ par } L_2 - L_3 \\
= \;& xyz(x-z)(y-z)\begin{vmatrix} 0 & 1 & x+z \\ 0 & 1 & y+z \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} && \text{mise en évidence du facteur} \left\{ \begin{array}{l} x-z \text{ sur } L_1 \\ y-z \text{ sur } L_2 \end{array} \right. \\
= \;& xyz(x-z)(y-z)\begin{vmatrix} 1 & x+z \\ 1 & y+z \end{vmatrix} && \text{en développant le déterminant selon la première colonne} \\
= \;& xyz(x-z)(y-z)(y+z-x-z) \\
= \;& xyz(x-z)(y-z)(y-x).
\end{aligned}$$

• On a $\det\begin{pmatrix} -a-x & a & 0 \\ b & -2b-x & b \\ 0 & a & -a-x \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} -x & a & 0 \\ -x & -2b-x & b \\ -x & a & -a-x \end{vmatrix} && \text{si on remplace } C_1 \text{ par } C_1 + C_2 + C_3 \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 0 & a+x \\ -x & -2b-x & b \\ -x & a & -a-x \end{vmatrix} && \text{si on remplace } L_1 \text{ par } L_1 - L_3 \\
&= (a+x)\begin{vmatrix} -x & -2b-x \\ -x & a \end{vmatrix} && \text{en développant le déterminant selon la première ligne} \\
&= -x(a+x)\begin{vmatrix} 1 & -2b-x \\ 1 & a \end{vmatrix} && \text{mise en évidence du facteur } (-x) \text{ sur } C_1 \\
&= -x(a+x)(a+2b+x).
\end{aligned}$$

Exercice 4

• Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Puisque $\det A = 2 - 1 = 1 \neq 0$, la matrice A est inversible. Déterminons les cofacteurs $(\mathcal{A})_{i,j}$ des éléments $(A)_{i,j},\ (i, j = 1, 2)$ de A.
On a $(\mathcal{A})_{1,1} = 2,\ (\mathcal{A})_{1,2} = 1,\ (\mathcal{A})_{2,1} = 1,\ (\mathcal{A})_{2,2} = 1$. On obtient ainsi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

• Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{si on remplace } L_3 \text{ par } L_3 - L_1 \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{en développant le déterminant selon la première colonne} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Puisque $\det A \neq 0$, la matrice inverse existe.
Déterminons les cofacteurs $(\mathcal{A})_{i,j}$ des éléments $(A)_{i,j},\ (i, j = 1, 2, 3)$ de A. On a

$(\mathcal{A})_{1,1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2;\quad (\mathcal{A})_{1,2} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1;\quad (\mathcal{A})_{1,3} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1;$

$(\mathcal{A})_{2,1} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;\quad (\mathcal{A})_{2,2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;\quad (\mathcal{A})_{2,3} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1;$

$(\mathcal{A})_{3,1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1;\quad (\mathcal{A})_{3,2} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1;\quad (\mathcal{A})_{3,3} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

Ainsi, on obtient

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5

5.1) Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

— Le polynôme caractéristique de A est

$$\det(A - \lambda\, \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\,(2-\lambda) - 2 = 2 - 3\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - 3\lambda = \lambda(\lambda - 3).$$

Les valeurs propres de A sont donc 0 et 3 ; ces valeurs propres étant simples, la matrice A est diagonalisable.

— Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 c'est-à-dire les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $(A - 0\,\mathbb{1})X = 0$. On a

$$(A - 0\,\mathbb{1})X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow X = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 sont donc les vecteurs

$$X = c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

— Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre 3 c'est-à-dire les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $(A - 3\,\mathbb{1})X = 0$. On a

$$(A - 3\,\mathbb{1})X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x - y = 0 \Leftrightarrow X = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 3 sont donc les vecteurs

$$X = c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad c \in \mathbb{C}_0.$$

— La matrice $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ est telle que $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5.2) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

— Le polynôme caractéristique de A est

$$\det(A - \lambda\,\mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2.$$

La matrice A possède donc la valeur propre double 1.

— Cherchons les vecteurs propres associés cette valeur propre 1 c'est-à-dire les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $(A - \mathbb{1})X = 0$. On a

$$(A - \mathbb{1})X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow X = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à cette valeur propre sont donc les vecteurs

$$X = c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

Comme ils sont tous multiples du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, deux vecteurs propres sont toujours linéairement dépendants et donc la matrice A n'est pas diagonalisable.

5.3) Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$.

— Le polynôme caractéristique de A est

$$\det(A - \lambda\,\mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & i \\ -i & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + i^2 = (1-\lambda)^2 - 1 = (1-\lambda-1)(1-\lambda+1) = -\lambda(2-\lambda).$$

Les valeurs propres de A sont donc 0 et 2 ; puisque ces valeurs propres sont simples, la matrice A est diagonalisable.

— Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 c'est-à-dire les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $(A - 0\,\mathbb{1})X = 0$. On a

$$(A - 0\,\mathbb{1})X = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + iy = 0 \\ -ix + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + iy = 0 \Leftrightarrow X = y\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 sont donc les vecteurs

$$X = c\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

— Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre 2 c'est-à-dire les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $(A - 2\,\mathbb{1})X = 0$. On a

$$(A - 2\,\mathbb{1})X = \begin{pmatrix} -1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x + iy = 0 \\ -ix - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -x + iy = 0 \Leftrightarrow X = y \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 2 sont donc les vecteurs

$$X = c \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

— La matrice $S \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est telle que $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5.4) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

— Le polynôme caractéristique de A est

$$\det(A - \lambda\,\mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3.$$

La matrice A admet donc la valeur propre triple 1.

— Cherchons les vecteurs propres associés à cette valeur propre 1 c'est-à-dire les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $(A - \mathbb{1})X = 0$. On a

$$(A - \mathbb{1})X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à cette valeur propre 1 sont donc les vecteurs

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C} \quad \text{non simultanément nuls.}$$

Trois vecteurs propres sont donc toujours linéairement dépendants ; la matrice A n'est donc pas diagonalisable.

5.5) Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

— Le polynôme caractéristique de A est

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda\,\mathbb{1}) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ 3 & 2-\lambda & -3 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ 3 & 2-\lambda & -3 \\ 1+\lambda & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} && \text{si on remplace } L_3 \text{ par } L_3 - L_1 \\
&= \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1-\lambda \\ 3 & 2-\lambda & 0 \\ 1+\lambda & 0 & 0 \end{vmatrix} && \text{si on remplace } C_3 \text{ par } C_3 + C_1 \\
&= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3 & 2-\lambda \\ 1+\lambda & 0 \end{vmatrix} && \text{en développant selon la troisième colonne} \\
&= (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1)
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont donc -1, 1 et 2 ; puisque ces valeurs propres sont simples, la matrice est diagonalisable.

— Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre -1 c'est-à-dire les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $(A + \mathbb{1})X = 0$. On a successivement

$$(A+\mathbb{1})X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x - y + z = 0 & (1) \\ x + y - z = 0 & (2) \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 2x = 0 & (1)+(2) \\ 2y - 2z = 0 & (2)-(1) \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = z \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow X = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre -1 sont donc les vecteurs

$$X = c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

— Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 c'est-à-dire les vecteurs non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $(A - \mathbb{1})X = 0$. On a successivement

$$(A-\mathbb{1})X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} -x - y + z = 0 & (1) \\ 3x + y - 3z = 0 & (2) \\ x - y - z = 0 & (3) \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 4x - 4z = 0 & (2)+(3) \\ y = 0 & (1)+(3) \\ x - y - z = 0 & (3) \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = z \\ y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont donc les vecteurs

$$X = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

— Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre 2 c'est-à-dire les vecteurs non nuls

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $(A - 2\,\mathbb{1})X = 0$. On a successivement

$$(A - 2\,\mathbb{1})X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} -2x - y + z = 0 \\ 3x - 3z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} -2x - y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = z \\ y = -z \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad X = z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 2 sont donc les vecteurs

$$X = c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c \in \mathbb{C}_0.$$

— La matrice $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est telle que $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 6

- Faux : le carré de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice nulle mais A n'est pas une matrice nulle.
- Un complexe comme somme et produit de complexes.
- Faux : si A est la matrice nulle on a l'égalité pour toute matrice B.
- Faux : $B^* = \bar{c}A$.
- Vrai : le déterminant de M est non nul.
- Vrai : l'addition des matrices est une opération commutative.
- Faux : le produit des matrices n'est pas commutatif.
- Faux : les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont égales à $-i$ et i.
- Faux : le déterminant d'une matrice carrée est égal au produit de ses valeurs propres.
- Faux : si un vecteur est un vecteur propre d'une valeur propre, son opposé l'est aussi.

REMARQUES IMPORTANTES

Lors de l'inversion et de la diagonalisation de matrices, on vérifie aisément que la solution trouvée est correcte.

— Quand on a déterminé la matrice inverse d'une matrice donnée, on vérifie que le résultat est correct en effectuant le produit de la matrice de départ par la matrice trouvée. On doit obtenir la matrice identité.

— Quand on a déterminé une forme diagonale Δ de la matrice de départ A et une matrice S qui y conduit, pour savoir si le résultat est correct, on doit vérifier que $S^{-1}AS = \Delta$, ce qui est équivalent à la vérification de l'égalité (bien plus simple !) $AS = S\Delta$.

3.3 Solutions des exercices de la "liste type 2003/2004"

Exercice 1

$iA = \begin{pmatrix} -2i & -2 \\ 1 & 0 \\ -i & i \end{pmatrix}$; $C^* = \begin{pmatrix} 2+i & -4i \\ 3 & i \end{pmatrix}$; $A + B$ impossible car matrices de formats différents ;

$A+\tilde{B} = \begin{pmatrix} -1 & 3i \\ -i & 2 \\ -2 & 2+i \end{pmatrix}$; $AA^* = \begin{pmatrix} 8 & -2i & 2+2i \\ 2i & 1 & i \\ 2-2i & -i & 2 \end{pmatrix}$; $AB = \begin{pmatrix} -4 & 4i & 2i \\ -i & 0 & i \\ -1+i & 2 & 2+i \end{pmatrix}$;
$BA = \begin{pmatrix} -1 & -1+2i \\ -1-5i & -1+i \end{pmatrix}$; $CB = \begin{pmatrix} 2+2i & 6 & 1+4i \\ 1+4i & -2i & 1-5i \end{pmatrix}$;
CA impossible car le nombre de colonnes de C n'est pas égal au nombre de lignes de A.

Exercice 2

$-7, -6, 0$.

Exercice 3

$x(x-3)$.

Exercice 4

$\begin{pmatrix} 2 & i \\ -1 & -i \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5

Première matrice : valeurs propres simples 0 et 3 donc matrice diagonalisable.
Vecteurs propres relatifs à la valeur propre 0 : $c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.
Vecteurs propres relatifs à la valeur propre 3 : $c\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.
La matrice $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est telle que $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Deuxième matrice : valeur propre double 1.
Vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 : $c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$ donc matrice non diagonalisable.

Troisième matrice : valeurs propres simples 0 et 2 donc matrice diagonalisable.
Vecteurs propres relatifs à la valeur propre 0 : $c\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.
Vecteurs propres relatifs à la valeur propre 2 : $c\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.
La matrice $S = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est telle que $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Quatrième matrice : valeur propre triple 1.
Vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 : $c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ non simultanément nuls ; la matrice n'est donc pas diagonalisable.

Cinquième matrice : valeurs propres -2 (simple) et 7 (double).
Vecteurs propres relatifs à la valeur propre 7 : $c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ non simultanément nuls.
Vecteurs propres relatifs à la valeur propre -2 : $c\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.

La matrice $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ est telle que $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 6

- Faux : le carré de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice nulle mais A n'est pas une matrice nulle.
- Vrai : dans ce cas M admet un inverse.
- Vrai : l'addition des matrices est une opération commutative.
- Faux : le produit des matrices n'est pas commutatif.
- Faux : les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont égales à $-i$ et i.
- Faux : le déterminant d'une matrice carrée est égal au produit de ses valeurs propres.
- Faux : si un vecteur est un vecteur propre d'une valeur propre, son opposé l'est aussi.
- Faux : les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont égales à $-i$ et i mais 0 n'est pas valeur propre de A.
- Vrai : si $\det(M - \lambda_0\ \mathbb{1}) = 0$ alors $\det(\overline{M} - \overline{\lambda_0}\ \mathbb{1}) = 0$.
- Vrai : le déterminant d'une matrice carrée est égal au déterminant de sa transposée.

3.4 Solutions des exercices de la "liste type 2004/2005"

Exercice 1

$$\widetilde{iA} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2i & -i \\ -2i & 1+i \end{pmatrix} \qquad (iB)^* = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 0 & -2i \\ i & -1-i \end{pmatrix} \qquad A+B = \begin{pmatrix} 1-2i & 2 & -3 \\ i & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$A + \widetilde{B}$: impossible car A et $\widetilde{B}$ ne sont pas de même format.

$AA^* = \begin{pmatrix} 12 & -4-2i \\ -4+2i & 3 \end{pmatrix}$

AB : impossible car le nombre de colonnes de A (3) diffère du nombre de lignes de B (2).
BA : impossible car le nombre de colonnes de B (3) diffère du nombre de lignes de A (2).

$CB = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2+6i \\ 1+4i & -2i & 1-5i \end{pmatrix}$

Exercice 2

Toute matrice commute avec $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Toute matrice diagonale commute avec $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Toute matrice du type $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$ commute avec $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Le premier déterminant est égal à $5 + 7i$ et le second à $\frac{7}{9}$.

Exercice 4

Le premier déterminant se factorise sous la forme $(3-x)(x+2)$ et le second sous la forme

$$-\left(x - \frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)\left(x - \frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right).$$

Exercice 5

Les matrices inverses sont

$$\begin{pmatrix} -1 & -i \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6

- Matrice $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$: valeurs propres : 0 et 4.

  Vecteurs propres relatifs à $\lambda = 0 : c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{C}_0$.

  Vecteurs propres relatifs à $\lambda = 4 : c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{C}_0$.

  Cette matrice A est diagonalisable ; si $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
- Matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$: valeur propre : 2 (double).

  Vecteurs propres relatifs à $\lambda = 2 : c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{C}_0$.

  Cette matrice n'est pas diagonalisable car elle ne possède pas deux vecteurs linéairement indépendants.
- Matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$: valeur propre : 2 (double).

  Vecteurs propres relatifs à $\lambda = 2 : c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c'\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $c, c' \in \mathbb{C}$ non simultanément nuls.

  Cette matrice A est déjà diagonale.
- Matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}$: valeurs propres : $-i$ et $2+i$.

  Vecteurs propres relatifs à $\lambda = -i : c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{C}_0$.

  Vecteurs propres relatifs à $\lambda = 2+i : c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{C}_0$.

  Cette matrice A est diagonalisable ; si $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & 2+i \end{pmatrix}$.
- Matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: valeur propre : 1 (triple).

  Vecteurs propres relatifs à $\lambda = 1 : c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c'\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $c, c' \in \mathbb{C}$ non simultanément nuls.

  Cette matrice n'est pas diagonalisable car elle ne possède pas trois vecteurs propres linéairement indépendants.
- Matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$: valeurs propres : -1 (simple) et 2 (double).

  Vecteurs propres relatifs à $\lambda = 2 : c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c'\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ avec $c, c' \in \mathbb{C}$ non simultanément nuls.

  Vecteurs propres relatifs à $\lambda = -1 : c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{C}_0$.

  Cette matrice A est diagonalisable ; si $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7

- Faux : le carré de $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice A mais A n'est ni la matrice nulle ni l'identité.
- Vrai : dans ce cas M admet un inverse.
- Faux : si A et B sont de format $m \times p$ alors $A + B$ est de format $m \times p$ mais le produit est impossible sauf si $m = p$.
- Faux : le produit matriciel n'est pas commutatif.
- Faux : le déterminant de la matrice doit être non nul or il est égal au produit des valeurs propres de la matrice.
- Faux : un vecteur propre et son opposé (vecteur propre de la meme valeur propre) est le vecteur nul jamais vecteur propre.
- Faux : cf ci-dessus.
- Vrai : propriété (cf théorie).

Chapitre 4

Représentation d'ensembles et fonctions de plusieurs variables

4.1 Exercices de base sur la liste 5 : représentation d'ensembles

Dans cette section figurent quelques exercices de base (dont il a été question durant les années académiques mentionnées).

Dans tout ce qui suit, sauf mention du contraire, x est l'inconnue réelle.

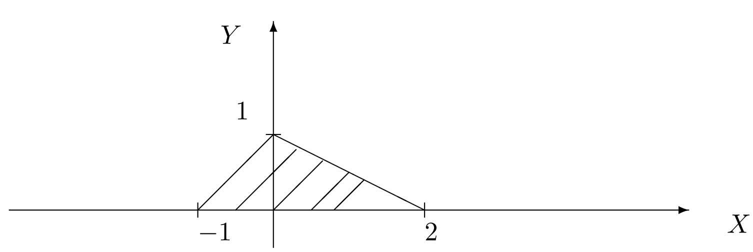
Liste 2002/2003

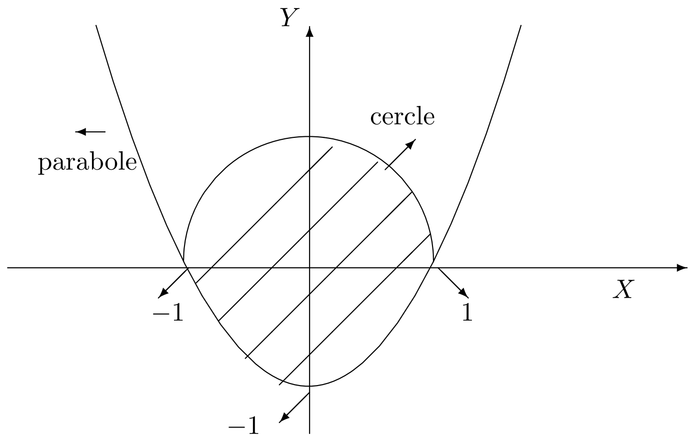
1. Représenter graphiquement les ensembles suivants

$$\{(x, x^2) \ : \ x \in \mathbb{R}\} \qquad \{(x,y) \ : \ x, y \in \mathbb{R}, |x| + |y| = 1\}$$
$$\{(x,y) \ : \ x, y \in \mathbb{R}, x^2 = y^2\} \qquad \{(x,y) \ : \ x, y \in \mathbb{R}, x + y \leq 1 \text{ et } x^2 + y^2 \geq 1\}$$

2. Représenter graphiquement l'ensemble des points du plan situés à l'intérieur du cercle centré au point de coordonnées $(0, 1)$, de rayon 2, et dont l'ordonnée est plus grande ou égale au carré de l'abscisse.

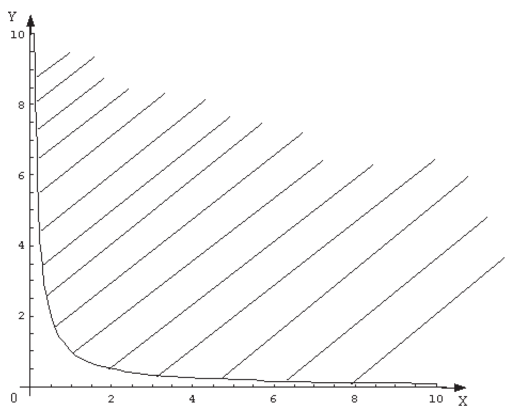
3. Décrire analytiquement les ensembles fermés hachurés suivants

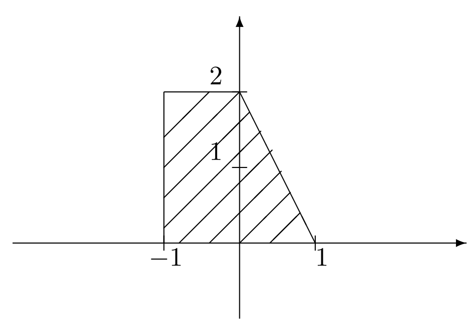




Liste 2003/2004

1. Représenter graphiquement l'ensemble des points du plan situés à l'intérieur du cercle centré au point de coordonnées $(0,1)$, de rayon 2, et dont l'ordonnée est plus grande ou égale au carré de l'abscisse.
2. Représenter graphiquement l'ensemble fermé des points du plan borné par le demi cercle centré à l'origine et de rayon 1, par la représentation graphique de $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = x^2\}$ et qui ont une ordonnée positive.
3. Décrire analytiquement les ensembles hachurés suivants (dans le premier graphique, l'équation de la courbe est $xy = 1$ et cette courbe fait partie de l'ensemble)



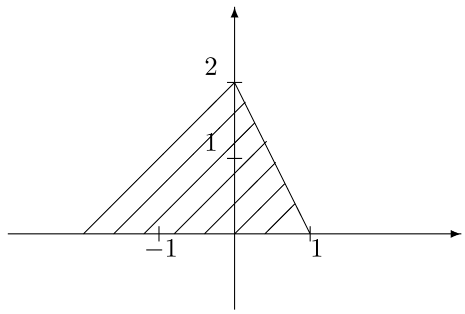


Liste 2004/2005

1. Représenter graphiquement les ensembles suivants

$$\{(x, 2\sqrt{1-x^2}) \ : \ x \in [-1,1]\} \qquad \{(x,y) \ : \ x,y \in \mathbb{R}, \frac{1}{x-y} \leq 1\}$$
$$\{(x,y) \ : \ x,y \in \mathbb{R}, |x-y| \leq 1\} \qquad \{(x,y) \ : \ x,y \in \mathbb{R}, x+y \leq 0 \text{ et } x^2+2x+y^2 \geq 3\}$$
$$\{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}, xy \geq 1\} \qquad \{(\sqrt{1+t^2}, t) : t \in \mathbb{R}\}$$

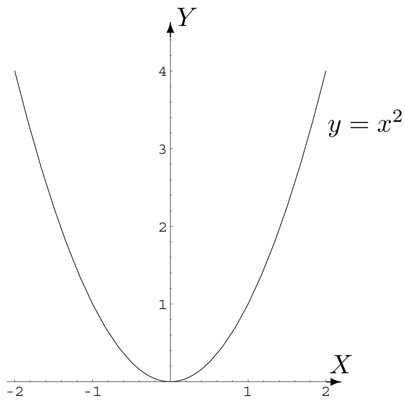
2. On se place dans un repère orthonormé. Représenter graphiquement l'ensemble des points du plan situés à l'intérieur de l'ellipse centrée à l'origine, dont les foyers, distants de $2\sqrt{3}$ unités, sont sur l'axe Y et dont l'excentricité vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$, et à l'extérieur du cercle centré au point de coordonnées $(1,0)$ et de rayon 1. Donner aussi une description analytique de cet ensemble.
3. Décrire analytiquement l'ensemble hachuré suivant



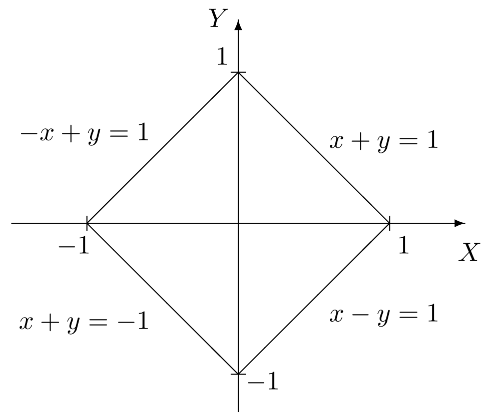
4.2 Résolution des exercices de la "liste type 2002/2003"

Exercice 1

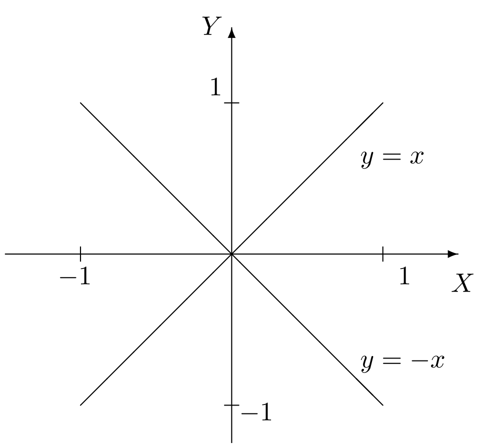
Représentation graphique de
$\{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$



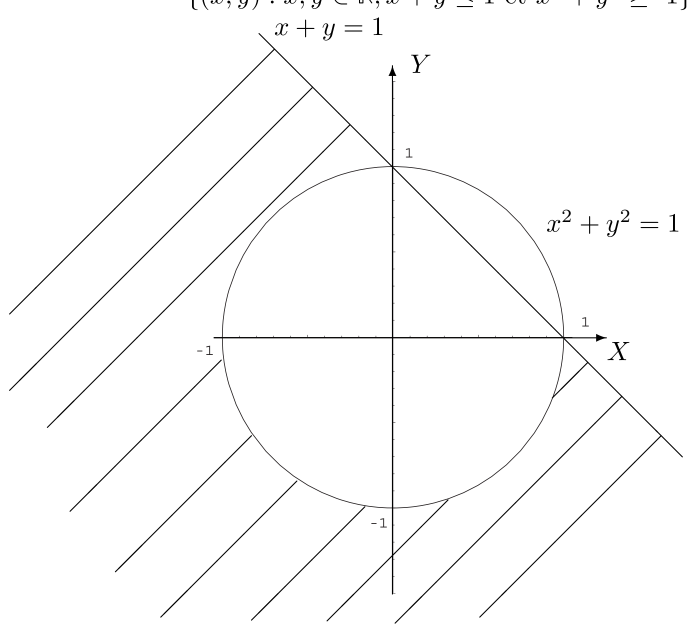
Représentation graphique de
$\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, |x| + |y| = 1\}$.



Représentation graphique de
$\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, x^2 = y^2\}$

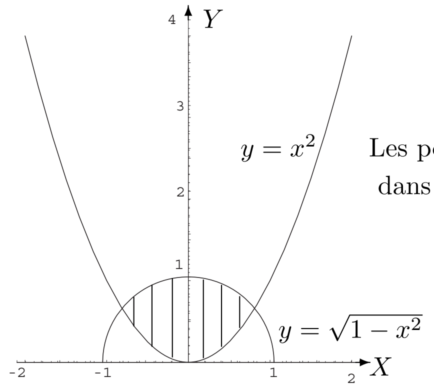


Représentation graphique de
$\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, x + y \leq 1 \text{ et } x^2 + y^2 \geq 1\}$.



Les points des bords sont compris dans l'ensemble.

Exercice 2
Représentation graphique de $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0,\ y \leq \sqrt{1-x^2},\ y \geq x^2\}$.



Les points des bords sont compris dans l'ensemble.

Exercice 3
Le premier ensemble hachuré est une représentation de

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0,\ x - y + 1 \geq 0,\ x + 2y - 2 \leq 0\},$$

les droites représentées ayant pour équation $y = 0$, $x - y + 1 = 0$ et $x + 2y - 2 = 0$.
Cependant, on peut également décrire A par

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1],\ x \in [y-1, 2-2y]\}$$

ou encore par

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,0], y \in [0, x+1]\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,2],\ y \in \left[0, \frac{-x}{2} + 1\right]\right\},$$

descriptions qui seront utiles, dans la suite, pour le calcul intégral.
Le second ensemble hachuré est une représentation de

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 - 1,\ y \leq \sqrt{1-x^2}\},$$

la parabole ayant pour équation $y = x^2 - 1$ et le demi-cercle $y = \sqrt{1-x^2}$.
On peut également décrire A par

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,1],\ y \in [x^2-1, \sqrt{1-x^2}]\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1,0], x \in [-\sqrt{y+1}, \sqrt{y+1}]\} \\ &\qquad \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1],\ x \in [-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2}]\}. \end{aligned}$$

4.3 Solutions des exercices de la "liste type 2003/2004"

Exercice 1

— $\{(x, 1-x^2) : x \in \mathbb{R}\}$: ensemble des points de la parabole dont le sommet a pour coordonnées $(0,1)$ et passant notamment par les points de coordonnées $(-1,0), (1,0), (-2,-3), (2,-3)$.
— $\{(x,y) : x, y \in \mathbb{R},\ |x| + |y| \leq 1\}$: ensemble des points intérieurs au carré ("bord" compris) dont les sommets ont pour coordonnées $(1,0), (0,1), (-1,0)$ et$(0,-1)$.
— $\{(x,y) : x, y \in \mathbb{R},\ x^2 + 2x + y^2 \leq 0\}$: ensemble des points intérieurs au cercle de rayon 1 et centré au point de coordonnées $(-1,0)$ ("bord" compris).
— $\{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}, x + y \leq 1$ et $x^2 + y^2 \geq 1\}$: ensemble des points extérieurs au cercle centré à l'origine et de rayon 1 ("bord" compris) et situés "sous" la droite d'équation $x + y = 1$ (droite comprise).

Exercice 2

Ensemble des points situés à l'intérieur du cercle donné, entre ce cercle et la parabole d'équation $y = x^2$.

Exercice 3

$$\left\{(x,y) : x, y \in \mathbb{R},\ x \in]0,+\infty[\text{ et } y \in \left[\frac{1}{x},+\infty\right[\right\} \qquad \left\{(x,y) : x, y \in \mathbb{R},\ y \in\ [0,2] \text{ et } x \in \left[-1, 1-\frac{y}{2}\right]\right\}$$

4.4 Solutions des exercices de la "liste type 2004/2005"

Exercice 1

— $\{(x, 2\sqrt{1-x^2}) : x \in [-1,1]\}$: ensemble des points d'ordonnée positive de l'ellipse centrée à l'origine, dont le grand axe est l'axe des ordonnées et passant notamment par les points de coordonnées $(-1,0), (1,0)$ et $(0,2)$.

— $\{(x,y) : x, y \in \mathbb{R},\ |x-y| \leq 1\}$: ensemble des points situés entre les droites d'équation $x - y = -1$ et $x - y = 1$, les points des droites étant compris.

— $\{(x,y) : x, y \in \mathbb{R},\ xy \geq 1\}$: ensemble des points situés à l'extérieur des branches de l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$, les points de la courbe étant compris.

— $\{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}, \frac{1}{x-y} \leq 1$: ensemble des points situés à l'extérieur des droites d'équation $y = x$ et $y = x - 1$, les points de la droite d'équation $y = x$ étant exclus et ceux de l'autre droite inclus.

— $\{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}, x+y \leq 0$ et $x^2+2x+y^2 \geq 3\}$: ensemble des points extérieurs au cercle centré au point de coordonnées $(-1,0)$ et de rayon 2 ("bord" compris) et situés "sous" la droite d'équation $x + y = 0$ (droite comprise).

— $\{(\sqrt{1+t^2}, t) : t \in \mathbb{R}\}$: ensemble des points d'abscisse positive de l'hyperbole centrée à l'origine, dont l'axe principal est l'axe des abscisses, passant notamment par le point de coordonnées $(1,0)$ et dont les asymptotes ont pour équation $y = -x$ et $y = x$.

Exercice 2

L'ellipse a pour équation $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$; ses sommets sont les points de coordonnées $(1,0), (-1,0), (0,2)$ et $(0,-2)$. Le cercle a pour équation $(x-1)^2 + y^2 = 1$.
La description analytique de l'ensemble est donnée par $\{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}, x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1, (x-1)^2 + y^2 \geq 1\}$.
On peut aussi décrire cet ensemble par

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,0], y \in [-2\sqrt{1-x^2}, 2\sqrt{1-x^2}]\}$$
$$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], y \in [-2\sqrt{1-x^2}, -\sqrt{2x-x^2}] \cup [\sqrt{2x-x^2}, 2\sqrt{1-x^2}]\}.$$

Exercice 3

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,2], x \in [y-2, \frac{2-y}{2}]\}$.

4.5 Exercices de base sur les listes 6-7 : fonctions de plusieurs variables

Dans cette section figurent quelques exercices de base (dont il a été question durant les années académiques mentionnées).

Liste 2002-2003

1. Quel est le domaine de définition et de dérivabilité des fonctions données ci-dessous ? Représenter graphiquement ces domaines.

$$f_1(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}, \quad f_2(x,y) = \ln(x-y), \quad f_3(x,y) = \ln(|x|-|y|)$$

$$f_4(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad f_5(x,y) = \arccos(x^2+y^2), \quad f_6(x,y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right).$$

Calculer

$$D_x^2 f_6(x,y) + D_y^2 f_6(x,y), \quad D_x D_y f_6(x,y).$$

2. Permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration.

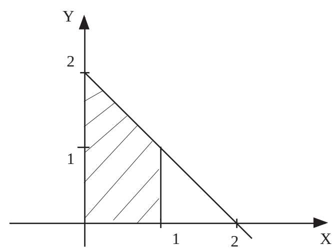
$$\int_0^1 \left(\int_{y-1}^{1-y} f(x,y)\ dx \right)\ dy, \quad \int_0^1 \left(\int_0^{-2x+2} f(x,y)\ dy \right)\ dx.$$

3. Calculer $\displaystyle\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \left(\int_{y^2}^{\sqrt[3]{\pi^2}} \sin(\sqrt{x^3})\ dx \right)\ dy$ et représenter l'ensemble d'intégration.

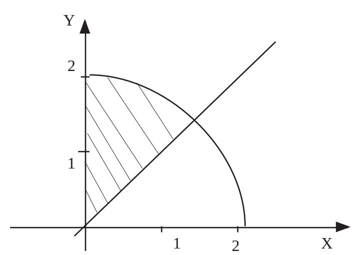
4. On considère la partie A du plan bornée par les droites d'équation $y = 2x, x = 0, y = 4$. Représenter A et calculer $\displaystyle\iint_A x\ dx\ dy$.

5. On considère la partie A du plan délimitée par l'axe X et le graphique de la fonction $\cos(x), x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Représenter A et calculer l'intégrale de $f(x,y) = 2y$ sur A.

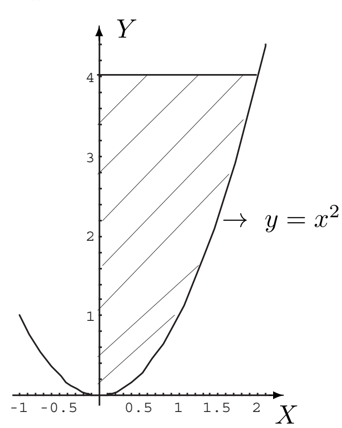
6. Calculer $\displaystyle\iint_A (x+y)\ dxdy$ où A est l'ensemble hachuré ci-dessous.



7. Calculer $\displaystyle\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\ dxdy$ où A est l'ensemble hachuré ci-dessous.

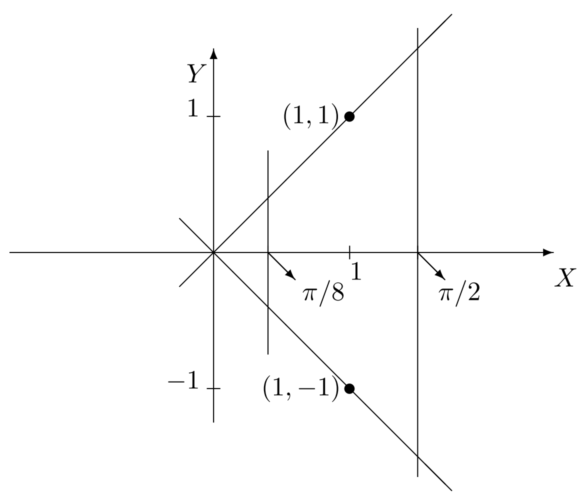


8. Calculer $\displaystyle\iint_A \frac{x}{\sqrt{1+y^2}}\ dxdy$ où A est la partie hachurée ci-dessous

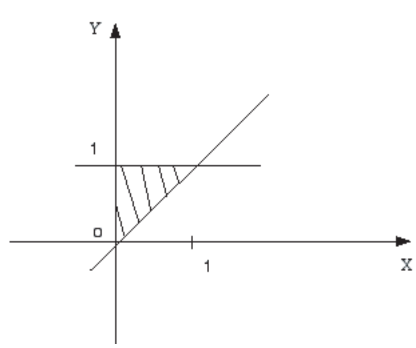


Liste 2003-2004

1. Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous et le représenter.
$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \quad g(x,y) = \ln(|x|+|y|-1).$$
2. Déterminer le domaine de définition et de dérivabilité des fonctions données explicitement ci-dessous, les représenter et calculer les dérivées partielles.
$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad f(x,y) = \ln\left(x^2+\frac{y^2}{4}-1\right).$$
3. Déterminer où la fonction $(x,y) \mapsto \ln(x^2+y^2)$ est indéfiniment continûment dérivable et calculer
$$D_x^2 f(x,y) + D_y^2 f(x,y).$$
4. On donne les fonctions $(r,\theta) \mapsto f(r,\theta) = r\cos(\theta)$ et $(r,\theta) \mapsto g(r,\theta) = r\sin(\theta)$. Où ces fonctions sont-elles dérivables ? Dans cet ensemble, calculer
$$D_r f(r,\theta) D_\theta g(r,\theta) - D_\theta f(r,\theta) D_r g(r,\theta).$$
5. Permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration dans les deux cas suivants
$$a) \int_{-1}^{1}\left(\int_0^{(x+1)/2} f(x,y)dy\right)dx \qquad b) \int_{-1}^{0}\left(\int_{\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx\right)dy.$$
6. a) On donne l'ensemble A suivant (ensemble borné fermé), borné par les deux droites obliques et les deux droites parallèles à Y. Calculer (et justifier l'intégrabilité) $\iint_A \sin(x+y)\, dxdy$ et simplifier la réponse au maximum.



b) On donne l'ensemble A suivant (ensemble hachuré, borné et fermé). Calculer (et justifier l'intégrabilité) $\iint_A x\sqrt{y^2-x^2}\, dxdy$.



7. a) On donne l'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1,e], y \in [0,\ln(x)]\}$ et la fonction $(x,y) \mapsto f(x,y) = y$. Représenter A. Calculer (et justifier l'intégrabilité) l'intégrale de f sur A en choisissant un ordre d'intégration. Effectuer à nouveau le calcul après avoir permuté l'ordre d'intégration.

   b) On donne $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1], x \in [y,1]\}$ et la fonction $(x,y) \mapsto f(x,y) = e^{x^2}$. Représenter A. Etablir que f est intégrable sur A et calculer son intégrale.

8. Représenter l'ensemble d'intégration et calculer (en justifiant)

$$\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\, dy \right) dx.$$

Liste 2004/2005

1. Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous et le représenter.

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2 + 9}, \quad g(x,y) = \ln(|x+y| - 1), \quad h(x,h) = \arcsin\left(\frac{1}{x+y}\right).$$

2. Déterminer le domaine de définition et d'infinie dérivabilté des fonctions f, g données explicitement ci-dessous, les représenter et calculer les dérivées partielles premières et secondes de f, les dérivées partielles premières de h et $|x| D_x g(x,y) + |y| D_y g(x,y)$.

$$f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2}), \quad g(x,y) = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right), \quad h(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y+1}).$$

3. On donne une fonction f, continûment dérivable sur $]-1,1[\times]0,+\infty[$. On demande le domaine de dérivabilité de la fonction $F \ : \ t \mapsto f(\ln(t), e - e^t)$ et l'expression de sa dérivée première en fonction des dérivées partielles de f.

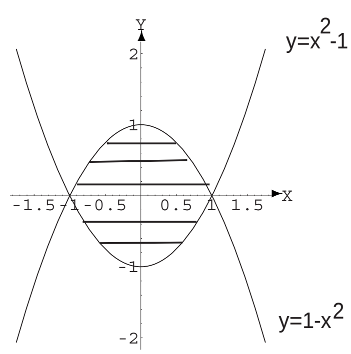
4. Permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration dans les cas suivants

$$a) \int_{-2}^{2} \left(\int_{-1}^{-x/2} f(x,y)dy \right) dx, \quad b) \int_{-1}^{0} \left(\int_{-3x-4}^{0} f(x,y)dy \right) dx \quad c) \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_y^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx \right) dy.$$

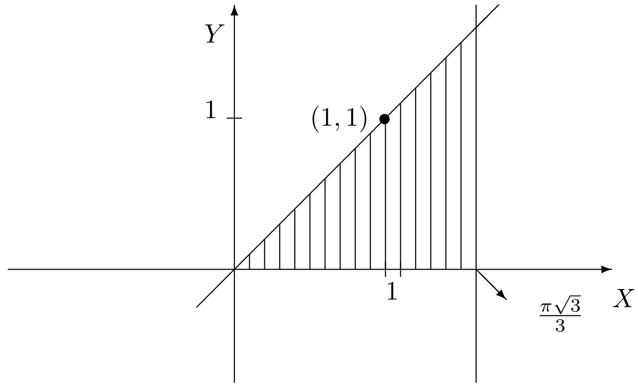
5. a) Calculer l'intégrale de $f(x,y) = y^2 \sin(xy)$ sur $A = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0,1]$.

   b) Calculer l'intégrale de $f(x,y) = x + y$ sur $A = \{(x,y) \ : \ 0 \leq y \leq \inf\{x, \sqrt{1-x^2}\}\}$.

6. a) Calculer l'intégrale de $f(x,y) = xe^y$ sur l'ensemble borné fermé hachuré suivant (et donner une description analytique de cet ensemble)



   b) Calculer l'intégrale de $f(x,y) = x^2 \sin(xy)$ sur l'ensemble borné et fermé suivant (hachuré)



7. Calculer l'intégrale de $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ sur $A = \{(x,y) : x \geq 0, y \leq 0, x^2+y^2 \leq 4\}$.
8. Soit A la surface fermée du plan bornée par les cercles de rayon respectivement $1, 2$, centrés à l'origine et l'axe X. Calculer l'intégrale de $f(x,y) = 1 + 3x + 8y^2$ sur A.

4.6 Résolution des exercices de la "liste type 2002/2003"

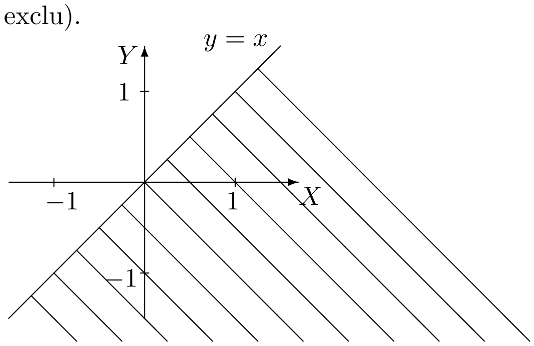
Exercice 1

• La fonction $(x,y) \mapsto f_1(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}$ est définie et dérivable sur

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - (x^2+y^2) > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$$

qui est l'ensemble des points intérieurs au cercle centré à l'origine et de rayon 1 (bord exclu).

• La fonction $(x,y) \mapsto f_2(x,y) = \ln(x-y)$ est définie et dérivable sur $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y > 0\}$ qui est l'ensemble hachuré ci-dessous (bord exclu).



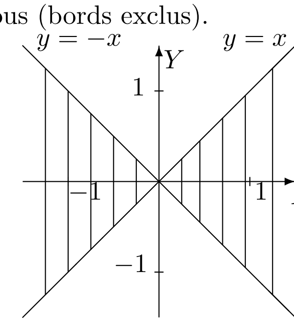
• La fonction $(x,y) \mapsto f_3(x,y) = \ln(|x| - |y|)$ est définie sur

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| - |y| > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| > |y|\}.$$

L'analyse de cette condition donne

$$|y| < |x| \Leftrightarrow -|x| < y < |x| \Leftrightarrow \begin{cases} -x < y < x \text{ si } x \geq 0 \\ x < y < -x \text{ si } x \leq 0 \end{cases} ;$$

A est donc l'ensemble hachuré ci-dessous (bords exclus).



Pour déterminer le domaine de dérivabilité, il faut tenir compte du fait que la fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en zéro et que la fonction $X \mapsto \ln(X)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$. Ainsi f_3 est dérivable sur

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| - |y| > 0,\ x \neq 0 \text{ et } \ y \neq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| - |y| > 0,\ y \neq 0\}.$$

• La fonction $(x,y) \mapsto f_4(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$; elle est dérivable sur

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

.

• La fonction $(x,y) \mapsto f_5(x,y) = \arcos(x^2+y^2)$ est définie sur $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x^2+y^2 \leq 1\}$ et dérivable sur $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x^2+y^2 < 1\}$. Comme $x^2+y^2 \geq 0\ \forall x,y \in \mathbb{R}$, on a

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\} \text{ et } B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}.$$

L'ensemble A est l'ensemble des points situés à l'intérieur du cercle centré à l'origine et de rayon 1, le bord étant compris ; pour l'ensemble B, le bord est donc exclu.

• La fonction$(x,y) \mapsto f_6(x,y) = \arctan(\frac{x}{y})$ est définie et dérivable sur $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$, ensemble des points du plan dont on exclut ceux de l'axe des abscisses.
Calculons les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f_6 par rapport à x puis par rapport à y. On a

$$D_x f_6(x,y) = \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}.\frac{1}{y} = \frac{y}{y^2+x^2}\,; \qquad D_x^2 f_6(x,y) = \frac{-2xy}{(y^2+x^2)^2}$$

$$D_y f_6(x,y) = \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}.(\frac{-x}{y^2}) = \frac{-x}{y^2+x^2}\,; \qquad D_y^2 f_6(x,y) = \frac{2xy}{(y^2+x^2)^2}.$$

Dès lors,

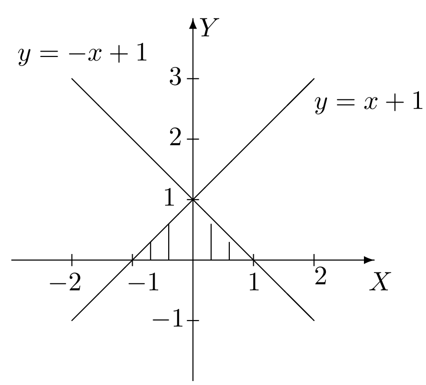
$$D_x^2 f_6(x,y) + D_y^2 f_6(x,y) = \frac{-2xy+2xy}{(y^2+x^2)^2} = 0.$$

Enfin,

$$D_x D_y f_6(x,y) = D_x\left[\frac{-x}{y^2+x^2}\right] = \frac{-y^2-x^2+2x^2}{(y^2+x^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(y^2+x^2)^2}.$$

Exercice 2

• L'ensemble d'intégration est l'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1], x \in [y-1, 1-y]\}$; il se représente de la façon suivante



Si f est intégrable sur A, on a

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{y-1}^{1-y} f(x,y)\,dx\right)\,dy.$$

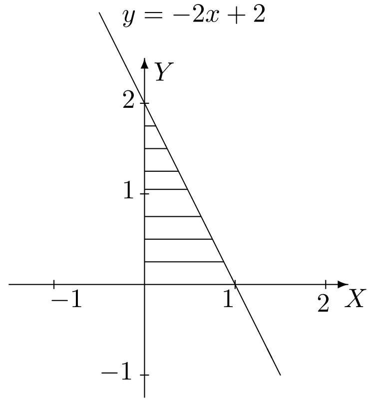
Comme on peut aussi décrire cet ensemble par

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,0], y \in [0,x+1]\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], y \in [0,-x+1]\},$$

si on permute l'ordre d'intégration, on a

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{0}\left(\int_{0}^{x+1} f(x,y)\,dy\right)\,dx + \int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{-x+1} f(x,y)\,dy\right)\,dx.$$

• L'ensemble d'intégration est l'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], y \in [0,-2x+2]\}$; il se représente de la façon suivante



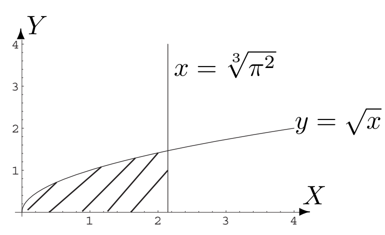
Si f est intégrable sur A, on a

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{-2x+2} f(x,y)\,dy\right)\,dx.$$

Comme on peut aussi décrire cet ensemble par $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,2], x \in [0, 1-\frac{y}{2}]\}$, si on permute l'ordre d'intégration, on a

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_{0}^{2}\left(\int_{0}^{1-\frac{y}{2}} f(x,y)\,dx\right)\,dy.$$

Exercice 3
L'ensemble d'intégration est l'ensemble borné, fermé $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, \sqrt[3]{\pi}], x \in [y^2, \sqrt[3]{\pi^2}]\}$; il se représente de la façon suivante



Comme la fonction $f : (x,y) \mapsto \sin(\sqrt{x^3})$ y est continue, elle y est intégrable et on a

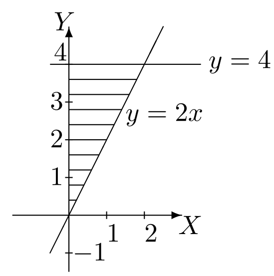
$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_{0}^{\sqrt[3]{\pi}}\left(\int_{y^2}^{\sqrt[3]{\pi^2}} \sin(\sqrt{x^3})\,dx\right)\,dy.$$

Pour faciliter les calculs, permutons l'ordre d'intégration.

Puisque A peut aussi être décrit par $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \sqrt[3]{\pi^2}], y \in [0, \sqrt{x}]\}$, on a

$$\begin{aligned}
\iint_A f(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^{\sqrt[3]{\pi^2}} \left(\int_0^{\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x^3})\,dy \right) dx \\
&= \int_0^{\sqrt[3]{\pi^2}} \sqrt{x}\sin(\sqrt{x^3})\,dx \\
&= \int_0^{\sqrt[3]{\pi^2}} \frac{2}{3} D(\sqrt{x^3})\sin(\sqrt{x^3})\,dx \\
&= \left[-\frac{2}{3}\cos(\sqrt{x^3}) \right]_0^{\sqrt[3]{\pi^2}} \\
&= -\frac{2}{3}\cos(\pi) + \frac{2}{3}\cos(0) = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

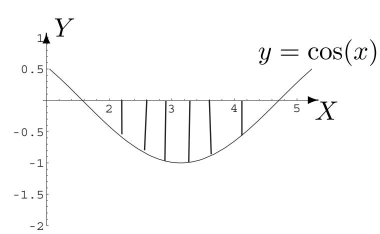
Exercice 4
Considérons la représentation de l'ensemble A ci-dessous.



L'ensemble A est un ensemble borné, fermé décrit par $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,2], y \in [2x,4]\}$ et la fonction $(x,y) \mapsto f(x,y) = x$ est continue sur A, donc intégrable sur A. Dès lors,

$$\begin{aligned}
\iint_A f(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^2 \left(\int_{2x}^4 x\,dy \right) dx \\
&= \int_0^2 \Big[xy \Big]_{y=2x}^{y=4} dx \\
&= \int_0^2 (4x - 2x^2)dx \\
&= \left[2x^2 - \frac{2x^3}{3} \right]_0^2 = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

Exercice 5
Soit la représentation de l'ensemble A ci-dessous.



L'ensemble A est un ensemble borné, fermé décrit par $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}], y \in [\cos(x), 0]\}$ et la fonction $(x,y)\mapsto f(x,y)=2y$ est continue sur A, donc intégrable sur A. On a donc

$$\begin{aligned}
\iint_A f(x,y)\,dx\,dy &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left(\int_{\cos(x)}^{0} 2y\,dy\right)dx \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\Big[y^2\Big]_{\cos(x)}^{0}dx \\
&= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos^2(x)\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(1+\cos(2x))\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \\
&= -\frac{1}{2}(\frac{3\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin(3\pi))+\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin(\pi)) = -\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Exercice 6
L'ensemble d'intégration est l'ensemble borné, fermé $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,1], y\in[0,2-x]\}$ et la fonction $(x,y)\mapsto f(x,y)=x+y$ est continue, donc intégrable sur A. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\iint_A (x+y)\,dx\,dy &= \int_0^1\left(\int_0^{2-x}(x+y)\,dy\right)dx \\
&= \int_0^1\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=2-x}dx \\
&= \int_0^1\left(2x-x^2+2-2x+\frac{x^2}{2}\right)dx \\
&= \int_0^1\left(-\frac{x^2}{2}+2\right)dx \\
&= \left[-\frac{x^3}{6}+2x\right]_0^1 = -\frac{1}{6}+2=\frac{11}{6}.
\end{aligned}$$

Exercice 7
L'ensemble d'intégration est l'ensemble borné, fermé $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,\sqrt{2}], y\in[x,\sqrt{4-x^2}]\}$ et la fonction $(x,y)\mapsto f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ est continue, donc intégrable sur A. Si on travaille en coordonnées polaires, cet ensemble, privé de l'origine, est décrit par $A'=\{(r,\theta)\in]0,2]\times[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]\}$; dans ces conditions, on a $f(x,y)=f(r\cos(\theta),r\sin(\theta))=\sqrt{r^2\cos^2(\theta)+r^2\sin^2(\theta)}=\sqrt{r^2}=r$. Il en résulte que

$$\begin{aligned}
\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy &= \int_0^2\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} r^2\,d\theta\right)dr \\
&= \int_0^2 r^2\,dr\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}1\,d\theta \\
&= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2.\frac{\pi}{4}=\frac{8}{3}.\frac{\pi}{4}=\frac{2\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Exercice 8
L'ensemble d'intégration est l'ensemble borné, fermé $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,2], y\in[x^2,4]\}$ et la fonction $(x,y)\mapsto f(x,y)=\frac{x}{\sqrt{1+y^2}}$ est continue, donc intégrable sur$A$. L'ensemble A peut aussi être

décrit sous la forme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 4], x \in [0, \sqrt{y}]\}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\iint_A \frac{x}{\sqrt{1+y^2}}\, dx\, dy &= \int_0^4 \left(\int_0^{\sqrt{y}} \frac{x}{\sqrt{1+y^2}}\, dx \right) dy \\
&= \int_0^4 \left[\frac{x^2}{2\sqrt{1+y^2}} \right]_{x=0}^{x=\sqrt{y}} dx \\
&= \int_0^4 \frac{y}{2\sqrt{1+y^2}}\, dx \\
&= \frac{1}{4} \int_0^4 D(1+y^2).\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\, dx \\
&= \frac{1}{4} \left[2\sqrt{1+y^2} \right]_0^4 = \frac{1}{2}(\sqrt{17}-1).
\end{aligned}$$

4.7 Solutions des exercices de la "liste type 2003/2004"

Exercice 1

dom $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 - x^2 - y^2 > 0\}$, ensemble des points du plan intérieurs au cercle centré à l'origine et de rayon 2 ("bord" exclu).
dom $g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| - 1 > 0\}$, ensemble des points du plan extérieurs au carré ayant pour sommets les points de coordonnées $(1, 0), (0, 1), (-1, 0)$ et $(0, -1)$ ("bords" exclus).

Exercice 2

Domaine de définition et de dérivabilité $= \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, ensemble de tous les points du plan excepté l'origine.
$D_x f(x, y) = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$ $\qquad$ $D_y f(x, y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

Domaine de définition et de dérivabilité $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 > 0\}$, ensemble des points du plan extérieurs à l'ellipse centrée à l'origine et dont les sommets sont les points de coordonnées $(1, 0), (0, 2), (-1, 0)$ et $(0, -2)$ ("bord" exclu).
$D_x f(x, y) = \frac{2x}{x^2+\frac{y^2}{4}-1}$ $\qquad$ $D_y f(x, y) = \frac{y}{2\left(x^2+\frac{y^2}{4}-1\right)}$.

Exercice 3

Fonction indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$; $D_x^2 f(x, y) + D_y^2 f(x, y) = 0$.

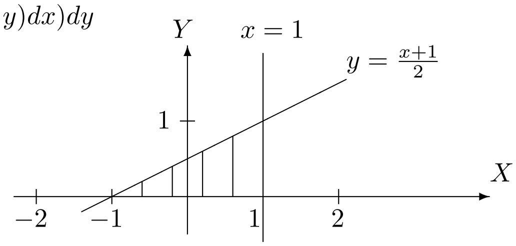
Exercice 4

Fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^2$; $D_r f(r, \theta) D_\theta g(r, \theta) - D_\theta f(r, \theta) D_r g(r, \theta) = r$.

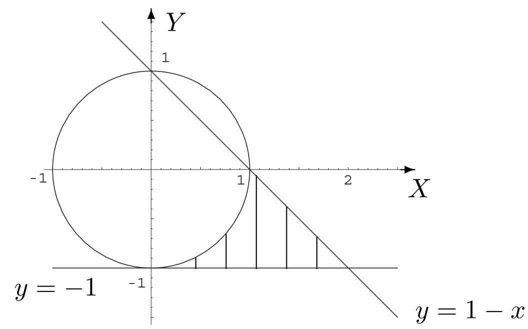
Exercice 5

Les ensembles d'intégration sont les parties hachurées du plan.

a) $\int_0^1 (\int_{2y-1}^1 f(x, y) dx) dy$



b) $\int_0^1 (\int_{-1}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy) dx + \int_1^2 (\int_{-1}^{1-x} f(x, y) dy) dx$

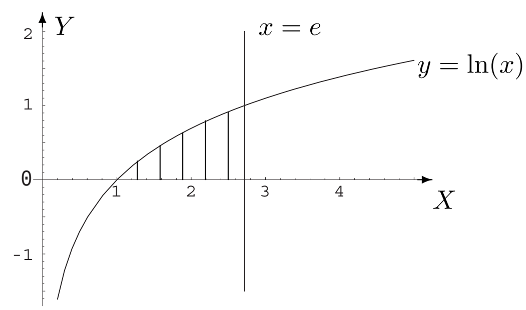


Exercice 6

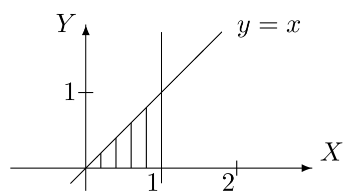
a) f est continu sur l'ensemble fermé borné A donc intégrable ; l'intégrale vaut $\frac{3\pi}{8}+\frac{\sqrt{2}}{4}$.
b) f est continu sur l'ensemble fermé borné A donc intégrable ; l'intégrale vaut $\frac{1}{12}$.

Exercice 7

A est l'ensemble hachuré.
a) f est continu sur l'ensemble fermé borné A donc intégrable ; l'intégrale vaut $\frac{e}{2}-1$.



b) f est continu sur l'ensemble fermé borné A donc intégrable ; l'intégrale vaut $\frac{1}{2}(e-1)$.



Exercice 8

L'ensemble d'intégration A est l'ensemble des points situés dans le quatrième quadrant, intérieurs au cercle centré à l'origine et de rayon 1. f est continu sur l'ensemble fermé borné A donc intégrable ; l'intégrale vaut $\frac{\pi}{2}(1-\frac{2}{e})$.

4.8 Solutions des exercices de la "liste type 2004/2005"

Exercice 1

— dom $(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2-y^2+9\geq 0\}$: ensemble des points situés entre les branches de l'hyperbole d'équation $x^2-y^2+9=0$ ayant pour sommets les points de coordonnées $(0,3)$ et $(0,-3)$, les points de la courbe étant compris.

- dom $(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x+y| - 1 > 0\}$: ensemble des points situés à l'extérieur des droites d'équation $x+y=1$ et $x+y=-1$, les points des droites étant exclus.
- dom $(h) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x+y| \geq 1\}$: même ensemble de points que pour g mais les points des droites sont inclus.

Exercice 2

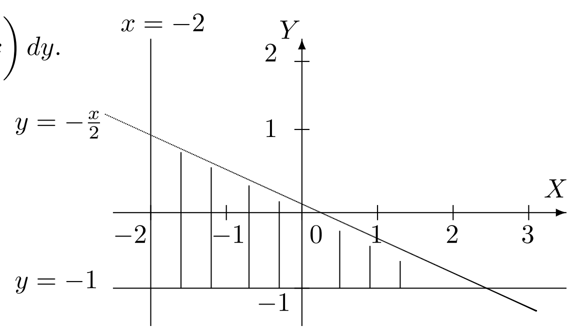
- Pour f, les deux domaines sont égaux à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, ensemble des points du plan dont on exclut l'origine. On a
$$D_x f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad D_y f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$$
$$D_x^2 f(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \quad D_y^2 f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad D_x D_y f(x,y) = D_y D_x f(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$
- Pour g, dom $(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq |y|\}$ tandis que le domaine d'infinie dérivabilité est $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < |y|\}$. Le domaine de définition de g est l'ensemble des points situés entre les droites d'équation $x+y=0$ et $x-y=0$ et comprenant notamment les points de coordonnées $(0,1)$ et $(0,-1)$, les points des droites étant inclus mais non le point de coordonnées $(0,0)$; pour le domaine d'infinie dérivabilité, les points des droites sont exclus. On a
$$|x|D_x g(x,y) + |y|D_y g(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad xy > 0 \\ \frac{-2x}{\sqrt{y^2-x^2}} & \text{si} \quad xy < 0 \end{cases}$$
- Pour h, les deux domaines sont égaux à $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y+1 > 0\}$: ensemble des points extérieurs à la parabole d'équation $y = -x^2 - 1$, les points de la courbe étant exclus. On a
$$D_x h(x,y) = \frac{x}{x^2+y+1} \qquad D_y h(x,y) = \frac{1}{2(x^2+y+1)}.$$

Exercice 3

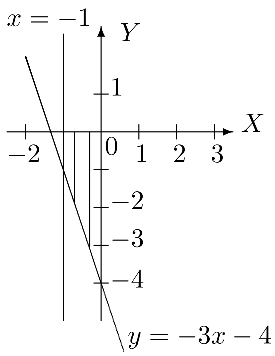
La fonction F est dérivable sur $]\frac{1}{e}, 1[$ et on a $DF(t) = (D_1 f)_{(f_1,f_2)} \cdot \frac{1}{t} - (D_2 f)_{(f_1,f_2)} \cdot e^t$.

Exercice 4

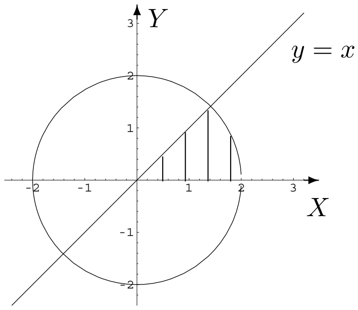
a) L'intégrale donnée est égale à $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(\int_{-2}^{-2y} f(x,y)\, dx \right) dy.$



b) L'intégrale donnée est égale à $\displaystyle\int_{-4}^{-1} \left(\int_{-\frac{y+4}{3}}^{0} f(x,y)\, dx \right) dy + \int_{-1}^{0} \left(\int_{-1}^{0} f(x,y)\, dx \right) dy.$



c) L'intégrale donnée est égale à $\int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^x f(x,y)\ dy \right) dx + \int_{\sqrt{2}}^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\ dy \right) dx.$



Exercice 5

a) L'intégrale vaut $\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi^2}$ b) L'intégrale vaut $\frac{1}{3}$.

Exercice 6

a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,1], y \in [-1+x^2, -x^2+1]$ et l'intégrale vaut 0.

b) $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[0, \frac{\pi\sqrt{3}}{3} \right], y \in [0,x] \right\}$ et l'intégrale vaut $\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi^2}{3}\right)$.

Exercice 7

L'intégrale vaut $\frac{4\pi}{3}$.

Exercice 8

L'intégrale vaut $\frac{33\pi}{2}$.

MATH0009
Biologistes et géographes B2

Année académique 2021-2022

Version 28 décembre 2021

Chapitre 5

Listes d'exercices 2021 - 2022 : correction

Liste 1 : coniques et nombres complexes

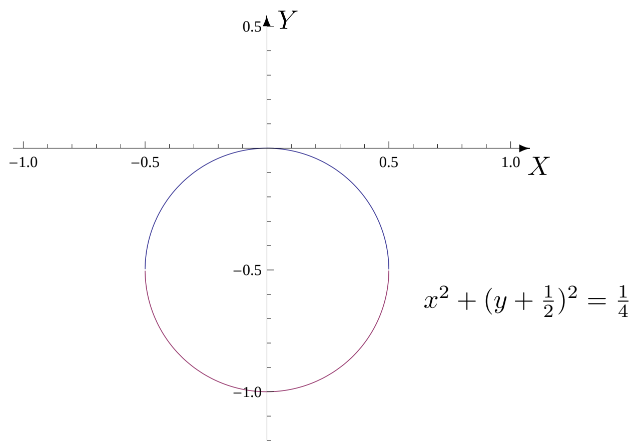
I. Les coniques

1. **Dans un repère orthonormé, on considère les équations cartésiennes suivantes**

(1) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 4$	(2) $x = y^2 + 2$	(3) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 4$	(4) $x^2 + y^2 + y = 0$
(5) $x^2 = -y^2$	(6) $\frac{y^2}{4} - x^2 = 4$	(7) $y = xy^2$	(8) $\frac{y^2}{4} + x^2 = 4$

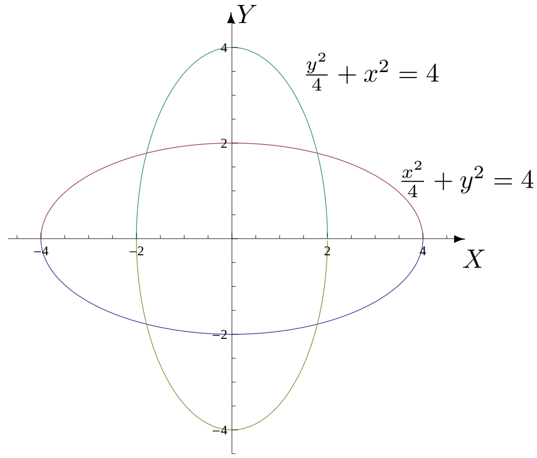
Sans faire aucun calcul, quelles sont celles qui pourraient être l'équation cartésienne
a) d'un cercle ? Les équations (4) et (5) pourraient être l'équation cartésienne d'un cercle.
b) d'une ellipse ? Les équations (3) et (8) pourraient être l'équation cartésienne d'une ellipse.
c) d'une hyperbole ? Les équations (1) et (6) pourraient être l'équation cartésienne d'une hyperbole.
d) d'une parabole ? L'équation (2) pourrait être l'équation cartésienne d'une parabole.

2. **a) Ecrire $y^2 + y$ sous la forme d'un carré parfait auquel on ajoute (ou on soustrait) une constante.**
On a $y^2 + y = (y^2 + y + \frac{1}{4}) - \frac{1}{4} = (y + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$.
b) Déterminer les coordonnées du centre et la valeur du rayon du cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + y = 0$. Le représenter graphiquement.
Le centre du cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + y = 0$ a pour coordonnées $(0, -\frac{1}{2})$ et son rayon vaut $\frac{1}{2}$.

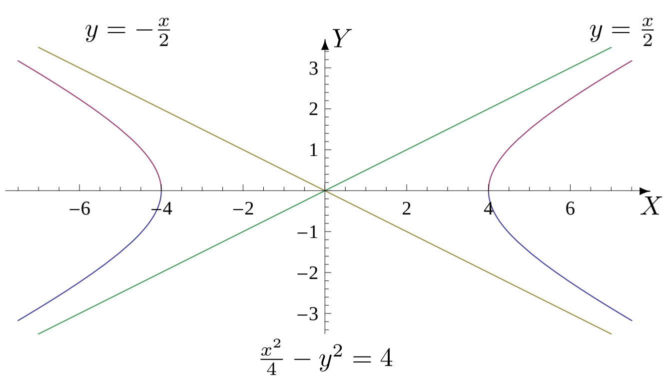


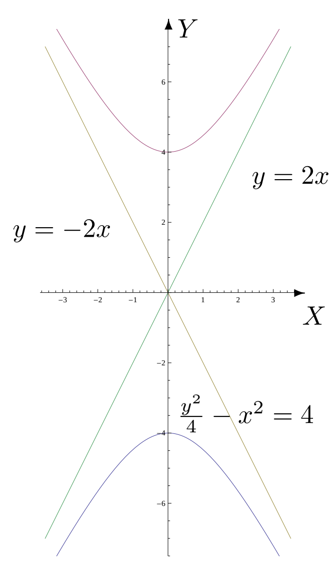
c) Pour chacune des ellipses repérées à l'exercice précédent, déterminer les coordonnées de leurs points d'intersection avec les axes. Les représenter graphiquement.

L'ellipse d'équation $\frac{x^2}{4} + y^2 = 4$ rencontre les axes aux points de coordonnées $(4, 0), (-4, 0)$, $(0, 2)$ et $(0, -2)$.
L'ellipse d'équation $\frac{y^2}{4} + x^2 = 4$ rencontre les axes aux points de coordonnées $(2, 0), (-2, 0)$, $(0, 4)$ et $(0, -4)$.



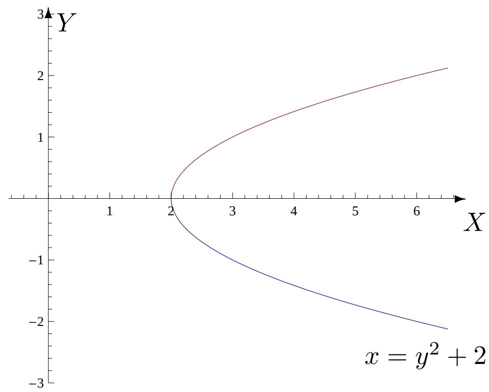
d) Donner les coordonnées des foyers et la valeur de l'excentricité des ellipses représentées ci-dessus.
Les foyers de l'ellipse d'équation (3) ont pour coordonnées $(2\sqrt{3}, 0)$ et $(-2\sqrt{3}, 0)$; son excentricité vaut $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Les foyers de l'ellipse d'équation (8) ont pour coordonnées $(0, 2\sqrt{3})$ et $(0, -2\sqrt{3})$; son excentricité vaut $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
e) Donner les coordonnées des foyers, des points d'intersection avec les axes, les équations cartésiennes des asymptotes et la valeur de l'excentricité des hyperboles repérées dans l'exercice ci-dessus.
Pour l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{4} - y^2 = 4$, les foyers ont pour coordonnées $(2\sqrt{5}, 0)$ et $(-2\sqrt{5}, 0)$, les sommets ont pour coordonnées $(4, 0)$ et $(-4, 0)$ et les asymptotes ont pour équation cartésienne $y = \frac{x}{2}$ et $y = -\frac{x}{2}$. Enfin, l'excentricité vaut $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$.
Pour l'hyperbole d'équation $\frac{y^2}{4} - x^2 = 4$, les foyers ont pour coordonnées $(0, 2\sqrt{5})$ et $(0, -2\sqrt{5})$, les sommets ont pour coordonnées $(0, 4)$ et $(0, -4)$ et les asymptotes ont pour équation cartésienne $y = 2x$ et $y = -2x$. Enfin, l'excentricité vaut $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$.
f) Représenter graphiquement ces hyperboles et leurs asymptotes.



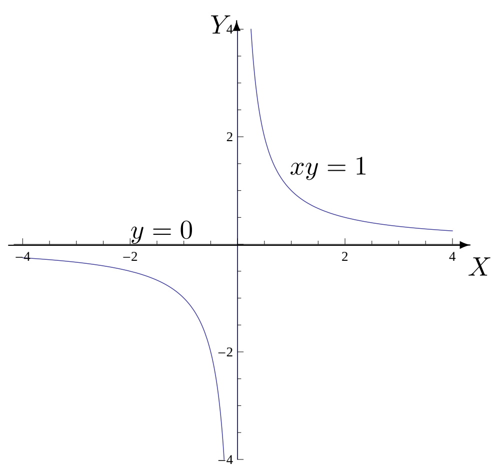


g) Donner les coordonnées du foyer et la valeur de l'excentricité des éventuelles

paraboles repérées à l'exercice précédent et les représenter graphiquement.
La parabole d'équation $x = y^2 + 2$ a un foyer dont les coordonnées sont $(\frac{9}{4}, 0)$ et son excentricité vaut $e = 1$.



h) Si, dans l'exercice précédent, il reste des équations de courbes non encore représentées, les analyser afin d'en donner aussi une représentation graphique.
L'équation $x^2 + y^2 = 0$ n'est vérifiée que par le point de coordonnées $(0, 0)$.
L'équation $y = xy^2 \Leftrightarrow y(1 - xy) = 0 \Leftrightarrow (y = 0 \text{ ou } xy = 1)$ a pour représentation graphique la droite d'équation $y = 0$ et l'hyperbole équilatère d'équation $y = 1/x$.



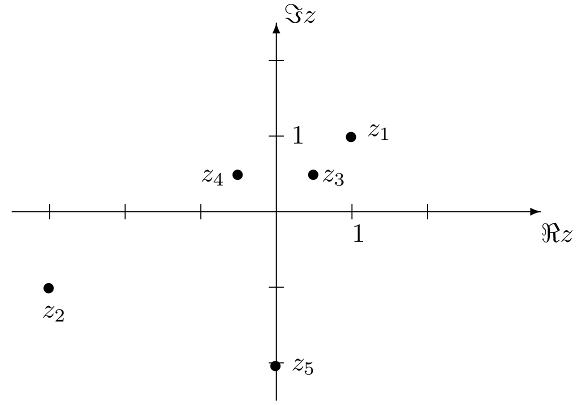
II. Les nombres complexes

1. **Déterminer les partie réelle, imaginaire, le conjugué et le module de chacun des complexes ci-dessous. Représenter ces complexes dans le plan muni d'un repère orthonormé (« X = axe réel » et « Y= axe imaginaire »)**

$$i + 1, \quad (-i + 1)(-1 - 2i), \quad \frac{1}{-i + 1}, \quad \frac{i^7}{i - 1}, \quad (1 - i)^2.$$

On a

z	$\Re z$	$\Im z$	$\overline{z}$	$\lvert z\rvert$
$z_1 = i + 1$	1	1	$1 - i$	$\sqrt{2}$
$z_2 = (-i + 1)(-1 - 2i)$	-3	-1	$-3 + i$	$\sqrt{10}$
$z_3 = \frac{1}{-i+1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1-i}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$z_4 = \frac{i^7}{i-1}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1-i}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$z_5 = (1 - i)^2$	0	-2	$2i$	2



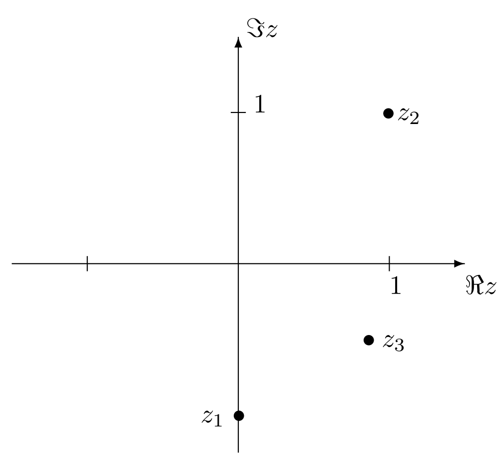
2. **Déterminer la forme trigonométrique des complexes suivants et les représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé (≪ X = axe réel ≫ et ≪ Y= axe imaginaire ≫)**

$$-i, \quad i + 1, \quad \frac{1}{2}(\sqrt{3} - i).$$

On a

$$z_1 = -i = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right), \quad z_2 = i + 1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$z_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - i) = \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right).$$



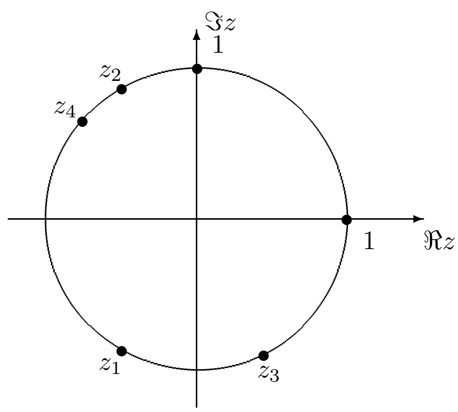
3. **On suppose que α est un nombre réel. Déterminer les partie réelle, imaginaire, le conjugué et le module de chacun des complexes ci-dessous. Représenter ces complexes**

dans le plan muni d'un repère orthonormé (« X = axe réel » et « Y= axe imaginaire ») en supposant que α appartient à l'intervalle $[\frac{\pi}{2}, \pi[$

$$\cos(\alpha) - i\sin(\alpha), \quad \frac{1}{\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)}, \quad (\cos(1) + i\sin(1))(\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)), \quad \sin(2\alpha) - i\cos(2\alpha).$$

On a

z	$\Re z$	$\Im z$	$\overline{z}$	$\lvert z\rvert$
$z_1 = \cos(\alpha) - i\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$-\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$	1
$z_2 = \frac{1}{\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)}$	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)$	1
$z_3 = (\cos(1) + i\sin(1))(\cos(\alpha) - i\sin(\alpha))$	$\cos(1-\alpha)$	$\sin(1-\alpha)$	$\cos(1-\alpha) - i\sin(1-\alpha)$	1
$z_4 = \sin(2\alpha) - i\cos(2\alpha)$	$\sin(2\alpha)$	$-\cos(2\alpha)$	$\sin(2\alpha) + i\cos(2\alpha)$	1



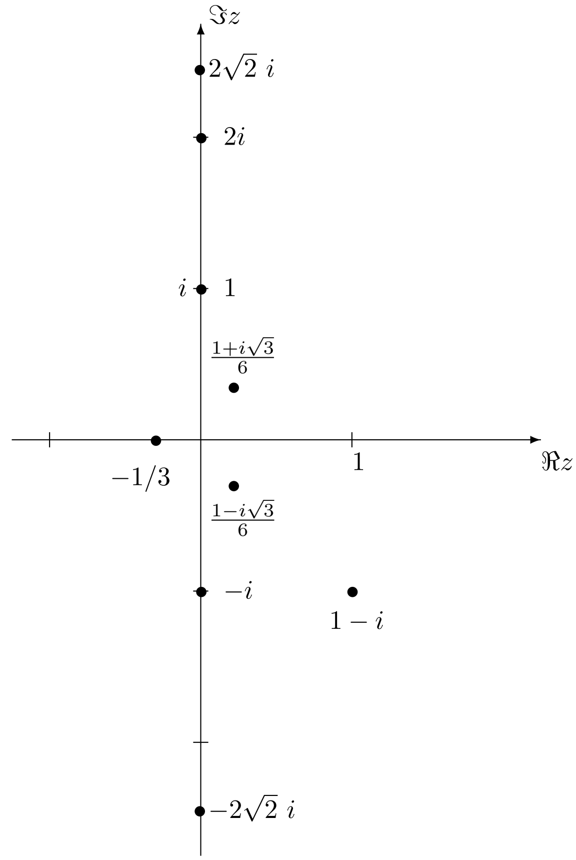
4. **Résoudre les équations suivantes et représenter les solutions dans le plan muni d'un repère orthonormé (« X = axe réel » et « Y= axe imaginaire »)**

(1) $z^2 + 8 = 0$ (2) $27z^3 + 1 = 0$ (3) $z^2 + 2 = iz$ (4) $z^2 - z + 1 + i = 0$ (5) $z^2 - (1-2i)z = 1 + i$

L'ensemble des solutions de l'équation (1) est $S = \{-2\sqrt{2}\, i, 2\sqrt{2}\, i\}$.
L'ensemble des solutions de l'équation (2) est

$$S = \left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\left(1 + i\sqrt{3}\right), \frac{1}{6}\left(1 - i\sqrt{3}\right)\right\}.$$

L'ensemble des solutions de l'équation (3) est $S = \{-i, 2i\}$.
L'ensemble des solutions de l'équation (4) est $S = \{1-i, i\}$.
L'ensemble des solutions de l'équation (5) est $S = \{1-i, -i\}$.


$\Im z$
$2\sqrt{2}\ i$
$2i$
i
1
$\frac{1+i\sqrt{3}}{6}$
$-1/3$
1
$\Re z$
$\frac{1-i\sqrt{3}}{6}$
$-i$
$1-i$
$-2\sqrt{2}\ i$

Liste 2 :
Équations différentielles, approximations polynomiales et calcul intégral à une variable

I. Equations différentielles

A. Quelques manipulations

1. **Si l'équation différentielle $(D_t y)^2 = 2y$ admet 2 solutions distinctes non nulles, peut-on affirmer qu'une combinaison linéaire de ces solutions est encore solution de cette équation ?**

   Cette équation n'est pas linéaire car une combinaison linéaire de solutions de cette équation n'est pas solution de l'équation. On a par exemple que la fonction $t \mapsto \frac{t^2}{2}$ est solution alors que la fonction $t \mapsto t^2$ ne l'est pas.

2. **Montrer que la fonction $g(t) = 3t^2 - 6t + 2,\ t \in \mathbb{R}$, vérifie le système** $\left\{\begin{array}{l}(D_t y)^2 = 12(y+1)\\ y(0) = 2\\ y(2) = 2\end{array}\right.$

   On a $g(0) = 2$ et $g(2) = 2$ ainsi que $Dg(t) = 6t - 6$. En remplaçant Dy et y respectivement par Dg et g dans le système, les trois équations sont vérifiées.

3. **Montrer que[1] la fonction** $g(t) = \text{cotan}(t) - \dfrac{1}{\sin(t)},\ t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$**, vérifie l'équation**

$$2\ \frac{dy}{dt} + y^2 = -1.$$

   On a $Dg(t) = \dfrac{-1 + \cos(t)}{\sin^2(t)}$ et en remplaçant $\dfrac{dy}{dt}$ et y respectivement par $Dg(t)$ et g dans l'équation donnée, celle-ci est vérifiée.

4. **Montrer que la fonction $u : x \mapsto C_1\, e^{C_2 x},\ x \in \mathbb{R}$, C_1 et C_2 étant des constantes complexes arbitraires, vérifie l'équation différentielle $v(x)D^2v(x) - (Dv(x))^2 = 0$.**

   La fonction u est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $Du(x) = C_1\, C_2\, e^{C_2 x}$ et $D^2u(x) = C_1\,(C_2)^2\, e^{C_2 x}$. En remplaçant dans l'équation donnée, on constate que cette dernière est vérifiée.

5. **Montrer que la fonction** $x \mapsto \tan(x) + \dfrac{1}{\cos(x)},\ x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, **vérifie l'équation différentielle**

$$2Df - f^2 = 1.$$

   La fonction donnée est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et on a

$$D\left(\tan(x) + \frac{1}{\cos(x)}\right) = \frac{1}{\cos^2(x)} + \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)},\ x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

   Dès lors, il est facile de montrer que, pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a l'égalité.

1. Les dérivées première et seconde de $f(x),\ x \in I$ s'écrivent parfois $\frac{df}{dx},\ \frac{d^2f}{dx^2}$

B. Equations différentielles, résolutions

1. **Résoudre les équations différentielles suivantes, en spécifiant dans quel intervalle on travaille**

$$1)\ 4Df + 2if = 0 \qquad 2)\ D^2f = 2f \qquad 3)\ D^2f = 0$$

$$4)\ D^2f + Df - 2f = 0 \qquad 5)\ 4D^2f - f = 0 \qquad 6)\ D^2f + f = 0$$

Les solutions des équations ci-dessus sont les fonctions suivantes

1) $f(x) = Ce^{-ix/2},\ x \in \mathbb{R}$ où C est une constante arbitraire complexe.

2) $f(t) = C_1\, e^{-\sqrt{2}\,t} + C_2\, e^{\sqrt{2}\,t},\ t \in \mathbb{R}$ où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes.

3) $f(u) = C_1 u + C_2,\ u \in \mathbb{R}$ où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes.

4) $f(x) = C_1\, e^{-2x} + C_2\, e^{x},\ x \in \mathbb{R}$ où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes.

5) $f(x) = C_1\, e^{-x/2} + C_2\, e^{x/2},\ x \in \mathbb{R}$ où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes.

6) $f(x) = C_1\, e^{-ix} + C_2\, e^{ix},\ x \in \mathbb{R}$ où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes.

2. **Résoudre les équations différentielles suivantes, en spécifiant dans quel intervalle on travaille (pour l'équation 5, en donner aussi les solutions réelles)**

1) $Df(x) - f(x) = \dfrac{1}{1-e^{x}}$ 2) $Df(x) - 2f(x) = \dfrac{1}{1-e^{-x}}$

3) $D^2f(x) + Df(x) - 2f(x) = e^x + 4x^2e^{2x} + 1$ 4) $4D^2f(x) - f(x) = \cos^2(x) - \frac{1}{2}$

5) $D^2f(x) + f(x) = x\,e^{2x}$ 6) $D^2f(x) + 2Df(x) + f(x) = (2+\cos(x))e^{-x}$

7 $D^2f(x) - f(x) = 1 + x^2,$ 8) $9D^2f(x) - Df(x) = 1$

9) $D^2f(x) - 4f(x) = 1 + e^{2x},$ 10) $D^2f(x) + 4f(x) = \sin(4x)$

Les solutions des équations ci-dessus sont les fonctions suivantes

1) $f(x) = (C - \ln(|e^{-x} - 1|))e^{x} - 1,\ x \in \mathbb{R}_0$ où C est une constante arbitraire complexe.

2) $f(x) = (C + e^{-x} + \ln(|e^{-x} - 1))e^{2x},\ x \in \mathbb{R}_0$ où C est une constante arbitraire complexe.

3) $f(x) = C_1\, e^{-2x} + \left(C_2 + \dfrac{x}{3}\right)e^{x} + \left(x^2 - \dfrac{5}{2}x + \dfrac{21}{8}\right)e^{2x} - \dfrac{1}{2},\ x \in \mathbb{R}$ où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes.

4) $f(x) = C_1\, e^{-\frac{x}{2}} + C_2\, e^{\frac{x}{2}} - \dfrac{1}{34}\cos(2x),\ x \in \mathbb{R}$ où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes.

5) $f(x) = C_1\, e^{-ix} + C_2\, e^{ix} + \left(\dfrac{x}{5} - \dfrac{4}{25}\right)e^{2x},\ x \in \mathbb{R}$ où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes.
Les solutions réelles sont données par

$$f(x) = C_1'\,\cos(x) + C_2'\,\sin(x) + \left(\frac{x}{5} - \frac{4}{25}\right)e^{2x},\ x \in \mathbb{R}$$

où C_1' et C_2' sont des constantes arbitraires réelles.

6) $f(x) = (C_1x + C_2 + x^2 - \cos(x))e^{-x},\ x \in \mathbb{R}$ où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes.
7) $c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{x} - x^2 - 3,\ x \in \mathbb{R}$ où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.
8) $c_1 + c_2e^{x/9} - x,\ x \in \mathbb{R}$ où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

9) $c_1\, e^{-2x} + \left(c_2 + \frac{1}{4}x\right)\, e^{2x} - \frac{1}{4},\ x \in \mathbb{R}$ où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.
10 $c_1\, e^{-2ix} + c_2\, e^{2ix} - \frac{1}{12}\sin(4x),\ x \in \mathbb{R}$ où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Note : dans les exercices 1 et 2, la constante peut différer d'un intervalle à l'autre.

3. **Résoudre le système suivant, en spécifiant dans quel intervalle on travaille**

$$\begin{cases} 4D^2 f(x) + f(x) = x^2 + x + 2 \\ f(0) = 0 \\ Df(0) = 2. \end{cases}$$

La solution du système est la fonction

$$f(x) = 6\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) + x^2 + x - 6,\ x \in \mathbb{R}.$$

4. **Résoudre l'équation différentielle suivante en précisant l'intervalle sur lequel on travaille.**

$$2D^2 f(x) + Df(x) = 2x$$

Déterminer ensuite la solution qui vaut 1 en 1 et dont la dérivée première vaut 0 en 1.

Les solutions de cette équation sont les fonctions

$$f(x) = C_1 + C_2\, e^{\frac{-x}{2}} + x^2 - 4x,\ x \in \mathbb{R}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes.
La solution qui vaut 1 en 1 et dont la dérivée première vaut 0 en 1 est la fonction

$$f(x) = 8 - 4\, e^{\frac{1-x}{2}} + x^2 - 4x,\ x \in \mathbb{R}.$$

C. Divers

1. **Dans certaines conditions, la température de surface $y(t)$ d'un objet change au cours du temps selon un ≪ taux ≫ proportionnel à la différence entre la température de l'objet et celle du milieu ambiant, que l'on suppose constante et que l'on note y_0. On obtient ainsi l'équation différentielle**

$$Dy(t) = k(y(t) - y_0)$$

où k est une constante strictement négative. Cette équation est appelée ≪ Newton's law of cooling ≫ et elle est utilisée notamment pour déterminer le temps entre la mort d'un individu et la découverte de son corps.
Résoudre cette équation et montrer alors que la température de l'objet se rapproche de la température ambiante au fur et à mesure que le temps passe.

Les solutions de cette équation sont les fonctions $y(t) = C\, e^{kt} + y_0,\ t \in \mathbb{R}$ où C est une constante arbitraire réelle.
Comme $k < 0$, on a $\lim_{t \to +\infty} y(t) = y_0$.

2. **Depuis un recensement de la population d'un pays, on constate que la vitesse d'accroissement de la population est, à tout instant, proportionnelle au nombre d'habitants à cet instant. Après combien de temps depuis ce recensement, cette population sera-t-elle triple sachant qu'elle a doublé en 50 ans ?**

La population aura triplé depuis le recencement après $\dfrac{50\ln(3)}{\ln(2)} \approx 79,248$ ans donc environ 79 ans.

3. **La vitesse initiale d'une balle roulant sur un sol horizontal est de 10 m/s. Vu les frottements, la vitesse décroît avec un taux constant de 2 m/s^2. Quand la balle sera arrêtée, quelle distance aura-t-elle parcourue depuis son point de départ ?**

   Quand la balle sera arrêtée, elle aura parcouru une distance de 25 m.

4. **Déterminer la valeur de la constante c de telle sorte que la fonction $f(x) = 3x^2,\ x \in \mathbb{R}$ soit une solution de l'équation différentielle**

$$c\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\frac{dy}{dx} - y = 0$$

   La constante vaut $-\dfrac{1}{12}$.

5. **Soit L la longueur d'un pendule et soit T sa période d'oscillation. Si les oscillations sont petites et si le pendule n'est soumis à aucune force autre que la gravité, alors un modèle liant T et L est l'équation différentielle**

$$\frac{dT}{dL} = \frac{T}{2L}.$$

   Montrer que cela implique que la période T est proportionnelle à la racine carrée de la longueur L.

   Les solutions de cette équation sont les fonctions $T(L) = C\sqrt{L},\ L \in]0, +\infty[$ où C est une constante arbitraire strictement positive.
   La période T est donc bien proportionnelle à la racine carrée de la longueur L.

II. Approximations polynomiales

1. **Dans chacun des cas suivants, déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre n en x_0 pour la fonction f_k. Représenter f_2 (—-ou f_3 ou f_5—) et ses approximations.**
   Pour f_5,
   a) donner une expression explicite du reste de ces approximations.
   b) indiquer où se situe le graphique de f_5 au voisinage de 0 par rapport à celui de chacune des approximations en tenant compte du point précédent.

$f_1(x) = \cos(x)\ e^{3x},\ x_0 = 0, n = 0, 1, 2, 3$ $\qquad$ $f_2(x) = \sqrt{1+9x},\ x_0 = 0, n = 0, 1, 2$

$f_3(x) = \dfrac{1}{1-2x},\ x_0 = 0, n = 0, 1, 2$ $\qquad$ $f_4(x) = \arctan(x),\ x_0 = 0$ (resp. $x_0 = 1$), $n = 0, 1, 2$

$f_5(x) = \cos^2(x),\ x_0 = 0,\ n = 0, 1, 2$ $\qquad$ $f_6(x) = \sin(x),\ x_0 = 1, n = 0, 1, 2$

Fonction	Ordre 0	Ordre 1	Ordre 2
f_1	1	$1 + 3x$	$1 + 3x + 4x^2,\ x \in \mathbb{R}$
f_2	1	$1 + \frac{9x}{2}$	$1 + \frac{9x}{2} - \frac{81x^2}{8},\ x \in \mathbb{R}$
f_3	1	$1 + 2x$	$1 + 2x + 4x^2,\ x \in \mathbb{R}$
$f_4(x_0 = 0)$	0	x	$x,\ x \in \mathbb{R}$

Fonction	Ordre 0	Ordre 1	Ordre 2
$f_4(x_0=1)$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}+\frac{x-1}{2}$	$\frac{\pi}{4}+\frac{x-1}{2}-\frac{(x-1)^2}{4},\ x\in\mathbb{R}$
f_5	1	1	$1-x^2,\ x\in\mathbb{R}$
f_6	$\sin(1)$	$\sin(1)+\cos(1)(x-1)$	$\sin(1)+\cos(1)(x-1)-\sin(1)\frac{(x-1)^2}{2},\ x\in\mathbb{R}$

L'approximation à l'ordre 3 en 0 de f_1 est donnée par $P(x)=1+3x+4x^2+3x^3,\ x\in\mathbb{R}$.

a) Pour f_5, si on note R_n le reste de l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, alors pour tout $x\in\mathbb{R}$, il existe $u_0,\ u_1,\ u_2$ compris entre 0 et x tels que

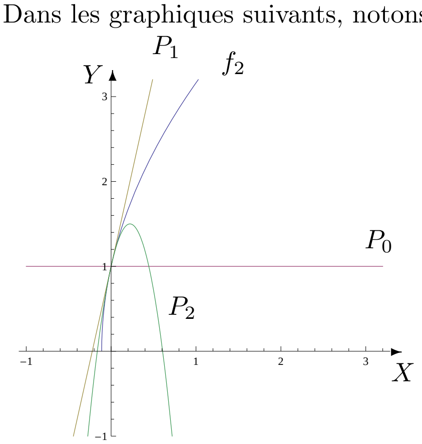
$$R_0(x)=-\sin(2u_0)x,\quad R_1(x)=-2\cos(2u_1).\frac{x^2}{2!}=-\cos(2u_1)x^2$$

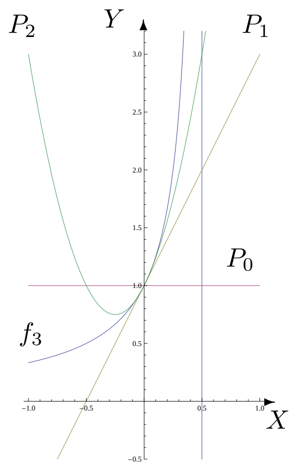
et

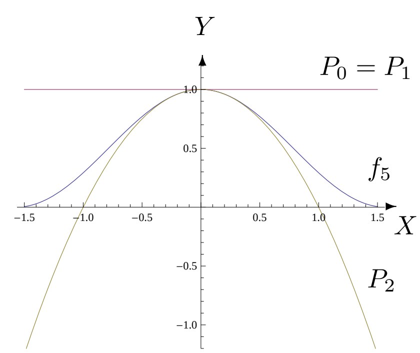
$$R_2(x)=4\sin(2u_2).\frac{x^3}{3!}=\frac{2\sin(2u_2)\,x^3}{3}.$$

b) Lorsque x est au voisinage de 0, $R_0(x)$ et $R_1(x)$ sont négatifs tandis que $R_2(x)$ est positif. Dès lors, le graphique de la fonction est situé en dessous de celui de P_0 et de celui de P_1 mais au-dessus de celui de P_2.

Dans les graphiques suivants, notons P_i l'approximation polynomiale à l'ordre i.

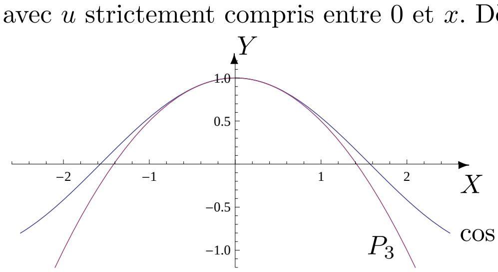






2. **Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre** 3 **en** 0 **de la fonction** cos **et en estimer le reste. Représenter la fonction et cette approximation dans le même repère orthonormé.**

L'approximation polynomiale à l'ordre 3 en 0 est donnée par $P(x)=1-\frac{x^2}{2},\ x\in\mathbb{R}$ et le reste vaut $R_3(x)=\dfrac{\cos(u)}{4!}x^4,\ x\in\mathbb{R}$ avec u strictement compris entre 0 et x. Dès lors, on a $|R_3(x)|\leq\dfrac{x^4}{24}$.



3. **Un professeur de mathématique lance un défi à ses élèves. Le premier qui donnera une approximation du nombre e avec les 3 premières décimales exactes et pourra expliquer sa méthode aux autres sera dispensé de la prochaine interrogation. Pour relever le défi, les élèves, restés en classe, n'ont droit qu'à une feuille et un crayon. Ils sont sans accès à internet et ne peuvent utiliser ni gsm, ni calculatrice ...**

   Comment peuvent-ils procéder ?

   L'approximation polynomiale en 0 à l'ordre n ($n \in \mathbb{N}$) de l'exponentielle est donnée par

   $$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^n}{n!},\ x \in \mathbb{R}$$

   et le reste associé vaut $R_n(x) = \dfrac{e^u}{(n+1)!}\, x^{n+1},\ x \in \mathbb{R}$ où u est un réel strictement compris entre 0 et x. Dès lors, si $x \in [0,1]$, $e^u \in [1,e] \subset [1,3]$ et on a $\quad R_n(x) \leq \dfrac{3\,x^{n+1}}{(n+1)!}$.

   Si $x = 1$, l'inégalité

   $$\frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{10^3} \quad \text{est vérifiée si} \quad n \geq 6\ (7! = 5040).$$

   Dès lors, en prenant $n = 6$ et $x = 1$, une valeur approchée de e est donnée par

   $$P(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = 2 + \frac{517}{720} = 2,718\ldots$$

III. Calcul intégral à une variable

A. Calcul d'intégrales sur un ensemble borné fermé

1. **Soit $a > 0$. Démontrer et interpréter graphiquement que**

   (a) si f est une fonction continue et paire sur $[-a,a]$, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$

   (b) si f est une fonction continue et impaire sur $[-a,a]$, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$

2. **Calculer les intégrales suivantes (si c'est possible)**

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{1} (x^2+2x)\ dx$	(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} xe^x\ dx$	(3) $\displaystyle\int_{-1}^{0} xe^{-x^2}\ dx$
(4) $\displaystyle\int_{1/2}^{3} \sqrt{3+\frac{x}{2}}\ dx$	(5) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin^2(x)\ dx$	(6) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \text{cotan}^2(x)\ dx$
(7) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} x\sin^2(x)\ dx$	(8) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \cos(x)\sin^2(x)\ dx$	(9) $\displaystyle\int_{-1}^{4} \frac{x+1}{x+2}\ dx$
(10) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \arctan(x)\ dx$	(11) $\displaystyle\int_{-2}^{2\sqrt{3}} \frac{1}{4+x^2}\ dx$	(12) $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\ dx$

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{1}(x^2+2x)\ dx = 0$	(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} xe^x\ dx = \frac{2}{e}$
(3) $\displaystyle\int_{-1}^{0} xe^{-x^2}\ dx = \frac{1-e}{2e}$	(4) $\displaystyle\int_{1/2}^{3}\sqrt{3+\frac{x}{2}}\ dx = 9\sqrt{2}-\frac{13\sqrt{13}}{6}$
(5) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3}\sin^2(x)\ dx = \frac{\pi-3\sqrt{3}+6}{24}$	(6) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3}\mathrm{cotan}^2(x)\ dx = \frac{12-4\sqrt{3}-\pi}{12}$
(7) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} x\sin^2(x)\ dx = \frac{\pi^2}{4}$	(8) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\cos(x)\sin^2(x)\ dx = \frac{1}{3}$
(9) $\displaystyle\int_{-1}^{4}\frac{x+1}{x+2}\ dx = 5-\ln(6)$	(10) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\arctan(x)\ dx = 0$
(11) $\displaystyle\int_{-2}^{2\sqrt{3}}\frac{1}{4+x^2}\ dx = \frac{7\pi}{24}$	(12) $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\ dx = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

3. **a) Si a est un paramètre réel fixé dans $]0,\frac{\pi}{2}]$, la fonction $f_1 : x \mapsto x^2\sin(ax)$ est-elle intégrable sur $[0,1]$? Si oui, que vaut son intégrale ?**

   La fonction est continue sur le fermé borné $[0,1]$; elle y est donc intégrable et son intégrale vaut
   $$\left(\frac{2}{a^3}-\frac{1}{a}\right)\cos(a)+\frac{2}{a^2}\sin(a)-\frac{2}{a^3}.$$

   b) Si $a>0$ est un réel fixé, la fonction $f_2 : x \mapsto \frac{a\ e^{-a^2}}{a^2+x}$ est-elle intégrable sur $[0,a^2]$? Si oui, que vaut son intégrale ?

   La fonction est continue sur le fermé borné $[0,a^2]$; elle y est donc intégrable et son intégrale vaut $a\ln(2)\ .\ e^{-a^2}$.

   c) Si $a>0$ est un réel fixé, la fonction $f_3 : x \mapsto \frac{\sqrt{a}}{x^2+a^2}$ est-elle intégrable sur $[a,+\infty[$? Si oui, que vaut son intégrale ?

   La fonction est continue sur $[a,+\infty[$ et, par application de la définition ou du critère en θ, elle est intégrable en $+\infty$ donc sur $[a,+\infty[$. Son intégrale vaut $\dfrac{\pi\sqrt{a}}{4a}$.

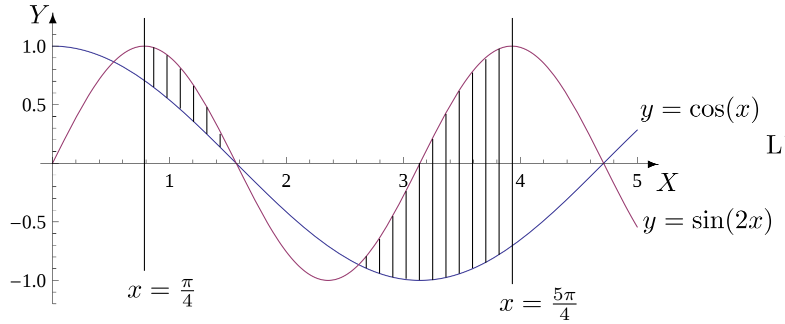
4. **En cartographie, sur une carte de Mercator, l'ordonnée d'un point proche de l'équateur et dont la latitude est $\varphi \in\ ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, est donnée par**
   $$y(\varphi) = R\int_0^{\varphi}\frac{1}{\cos(u)}du.$$

   Montrer que
   $$y(\varphi) = R\ \ln\left(\left|\tan\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right).$$

B. Calcul d'aires

1. **Calculer l'aire de la partie du plan dont une description analytique est la suivante**
   $$\left\{(x,y) : x \in \left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right], y\in\mathbb{R} \text{ et } \cos(x)\leq y\leq \sin(2x)\right\}.$$

Donner aussi une représentation graphique de cet ensemble.

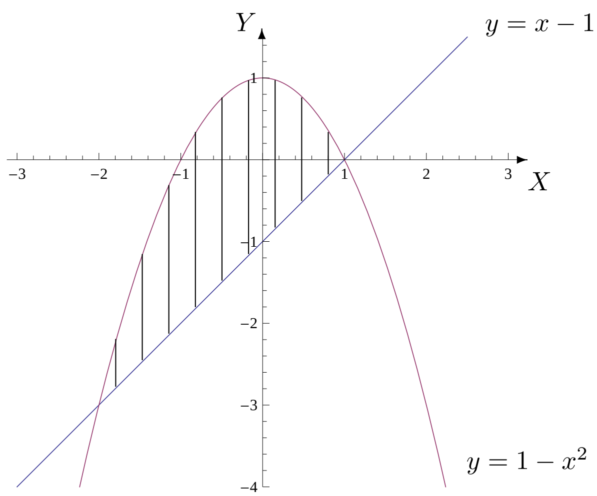


L'aire hachurée vaut $\sqrt{2} + \frac{1}{4}$.

2. **Calculer l'aire de la partie du plan dont une description analytique est la suivante**

$$\left\{(x, y) : x \in [-2, 1],\ y \in [x-1, 1-x^2]\right\}.$$

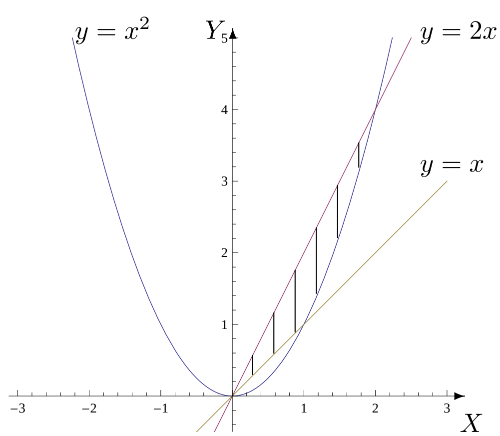
Donner aussi une représentation graphique de cet ensemble.



L'aire hachurée vaut $\frac{9}{2}$.

3. **On considère l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 2x,\ y \geq x^2\}$. Donner une représentation graphique de cet ensemble en le hachurant et calculer l'aire de cette région du plan.**

   L'aire de la région hachurée vaut $\dfrac{7}{6}$.



C. Calcul d'intégrales sur un ensemble non borné fermé

1. **Calculer les intégrales suivantes (si c'est possible)**

(1) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$	(2) $\displaystyle\int_{-1}^0 \ln(x^2)\,dx$
(3) $\displaystyle\int_{-1}^e x\ln(\lvert x\rvert)\,dx$	(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{9x^2+4}\,dx$
(5) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{9x^2-4}\,dx$	(6) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-2x+1}\,dx$
(7) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx$	(8) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^2+2x-3}\,dx$
(9) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\pi/3} \cos(2x)\,e^x\,dx$	(10) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,e^{2x}\,dx$
(11) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,dx$	(12) $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{1}{x^2-4}\,dx$

(1) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{10\sqrt{2}}{3}$	(2) $\displaystyle\int_{-1}^0 \ln(x^2)\,dx = -2$
(3) $\displaystyle\int_{-1}^e x\ln(\lvert x\rvert)\,dx = \frac{e^2+1}{4}$	(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{9x^2+4}\,dx = \frac{\pi}{12}$
(5) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{9x^2-4}\,dx = \frac{1}{12}\ln(2)$	(6) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-2x+1}\,dx = 1$
(7) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{\pi}{8}$	(8) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^2+2x-3}\,dx \quad \nexists$
(9) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\pi/3} \cos(2x)\,e^x\,dx = \frac{e^{\frac{\pi}{3}}(2\sqrt{3}-1)}{10}$	(10) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,e^{2x}\,dx \quad \nexists$
(11) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,dx = -1$	(12) $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{1}{x^2-4}\,dx = \frac{1}{4}\ln(3)$

Pour l'intégrale (8), la fonction n'est pas intégrable en -3 et pour l'intégrale (10), elle n'est pas intégrable en $+\infty$.

Liste 3 : calcul matriciel (1)

I. Opérations entre matrices

1. **Soient les matrices A, B, C données par**

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & i \\ 1+i & -1 \\ \frac{3}{i} & (2-i)^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ i & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{i+1} \\ -2i & \frac{i}{2} \end{pmatrix}.$$

Si possible, effectuer les opérations suivantes (et simplifier la réponse au maximum). Si cela ne l'est pas, en expliquer la raison.

$$1)\ A+B,\ 2)\ A+\widetilde{B},\ 3)\ A.B,\ 4)\ A.B+C,\ 5)\ B.A,\ 6)\ C.\widetilde{A},\ 7)\ A^*.C,\ 8)\ i.C,\ 9)\ (i.A)^*.$$

1) $A+B$ est impossible à calculer car les matrices n'ont pas le même format.

2) $A+\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2+i & -2i \\ i & 3 & 1-4i \end{pmatrix}$

3) $A.B = \begin{pmatrix} 8+i & 4+10i \\ 3+5i & -10+8i \end{pmatrix}$

4) $A.B+C = \begin{pmatrix} 11+i & \frac{9+19i}{2} \\ 3+3i & \frac{-20+17i}{2} \end{pmatrix}$

5) $B.A = \begin{pmatrix} 4 & 2+2i & -6i \\ 2+4i & -3+i & 12-19i \\ 0 & 1+i & -3+8i \end{pmatrix}$

6) $C\widetilde{A}$ est impossible à calculer car le nombre de colonnes (2) de C n'est pas égal au nombre de lignes (3) de $\widetilde{A}$.

7) $A^*C = \begin{pmatrix} 4 & \frac{3}{2}-i \\ 3-i & -\frac{3i}{2} \\ 8+3i & \frac{-1+6i}{2} \end{pmatrix}$

8) $iC = \begin{pmatrix} 3i & \frac{1+i}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

9) $(iA)^* = \begin{pmatrix} -2i & -1 \\ -1-i & i \\ 3 & 4-3i \end{pmatrix}$

2. **Soit A une matrice carrée de dimension 3 telle que $A_{ij} = 1, \forall i, j$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.**

Calculer $C = AB - BA$ et en déduire la forme de $\widetilde{C} + C$.

On a $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\widetilde{C} + C$ est la matrice nulle de dimension 3.

3. **On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 - 2A + 3\ \mathbb{1} = 0$.**

4. **Déterminer la forme générale des matrices qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.**

La forme générale des matrices qui commutent avec A est du type $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{C})$.

II. Déterminants

1. **Calculer le plus rapidement possible le déterminant de chacune des matrices suivantes.**

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2-i & 3i \\ -1 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ (i+1)^2 & 5 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -6 \end{pmatrix}\ D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

   Le déterminant de A vaut $\frac{1}{9}(8-i)$, celui de B vaut 1, celui de C vaut 90 et celui de D vaut $-\frac{7}{2}$.

2. **Le déterminant de chacune des matrices suivantes est un polynôme en $x \in \mathbb{C}$. Factoriser ce polynôme en un produit de facteurs du premier degré.**

$$A = \begin{pmatrix} 1-x & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2-x \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} i & x+2 \\ -x & -i \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} x & -4 \\ 1 & x \end{pmatrix}.\ D = \begin{pmatrix} x & 0 & 3 \\ 0 & x+1 & x \\ 1 & 0 & x-2 \end{pmatrix}.$$

   Le déterminant de A est égal à $\left(x - \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \dfrac{3-\sqrt{13}}{2}\right)$; celui de B est égal à $(x+1)^2$, celui de C vaut $(x+2i)(x-2i)$ et celui de D $(x+1)^2(x-3)$.

III. Inversion de matrices

Calculer (si elle existe) la matrice inverse de chacune des matrices suivantes (on donne $\alpha \in \mathbb{R}$).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \end{pmatrix},\quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- L'inverse de A est $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- La matrice B ne possède pas d'inverse car son déterminant est nul.
- La matrice C est égale à son inverse.
- L'inverse de D est $\frac{1+i}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ i & i & 1 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Liste 4 : calcul matriciel (2)

I. Diagonalisation

1. **Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes et en donner la multiplicité.**

$$A = \begin{pmatrix} i & -i \\ i & i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice A sont $-1+i$ et $1+i$; ces valeurs propres sont simples (de multiplicité 1).
Les valeurs propres de la matrice B sont 2 (valeur propre double) et 3 (valeur propre simple).
Les valeurs propres de la matrice C sont $-4,\ 1$ et 3 ; ces valeurs propres sont simples.

2. **Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Pourquoi ? Si elles le sont, en déterminer une forme diagonale Δ, ainsi qu'une matrice inversible S qui y conduit.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits AS et $S\Delta$. Comparer les matrices obtenues. N'aurait-on pas pu prévoir ce resultat sans effectuer les calculs ? Pourquoi ?

• Matrice A : 2 valeurs propres simples : -2 et 5 ; la matrice est donc diagonalisable.
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -2 sont du type $c\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$ et ceux relatifs à la valeur propre 5 sont du type $c'\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c' \in \mathbb{C}_0$.
On a, par exemple, $\Delta = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ avec $S = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ si on note A la matrice donnée.
Dès lors, en effectuant les produits, on a $AS = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} = S\Delta$. Comme A est diagonalisable, on a $\Delta = S^{-1}AS \Leftrightarrow S\Delta = AS$ en multipliant les deux membres à gauche par S.

• Matrice B : 2 valeurs propres, l'une simple 1 et l'autre double -1.
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre double -1 sont du type $c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$. Comme cette valeur propre n'engendre pas 2 vecteurs propres linéairement indépendants, la matrice n'est pas diagonalisable.
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre simple 1 sont du type $c'\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c' \in \mathbb{C}_0$.

• Matrice C : 2 valeurs propres, l'une simple 1 et l'autre double -1.
Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre double -1 sont du type $c_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ non simultanément nuls. Cette matrice est donc diagonalisable car elle possède 3 vecteurs propres linéairement indépendants.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre simple 1 sont du type $c\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}_0$.

On a, par exemple, $S^{-1}CS = \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ avec $S = \begin{pmatrix}-2&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ si on note C la matrice donnée.

3. **Une matrice carrée A de dimension 2 possède les deux valeurs propres 1 et -1, auxquelles peuvent être associés respectivement les vecteurs propres $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. Que vaut A ?**

   La matrice A est égale à $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$.

II. Divers

1. **En algèbre linéaire (ou géométrie analytique), une rotation du plan (d'angle θ) est représentée par une matrice du type**

$$M_\theta = \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$$

où θ est un réel (et représente la mesure de l'angle de la rotation).

— **Pour tout θ, déterminer la matrice produit M_θ^2 et en simplifier les éléments au maximum.**
On a
$$M_\theta^2 = \begin{pmatrix}\cos(2\theta) & -\sin(2\theta)\\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta)\end{pmatrix}$$

— **Montrer que quels que soient θ, θ', les matrices M_θ et $M_{\theta'}$ commutent. Qu'est-ce que cela signifie en termes de rotations ?**
On a
$$M_\theta M_{\theta'} = M_{\theta'} M_\theta = \begin{pmatrix}\cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta')\\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta')\end{pmatrix}$$
ce qui signifie que l'ordre dans lequel on effectue les rotations n'a pas d'importance.

— **Montrer que quel que soit le réel θ, la matrice**
$$\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$$
est aussi une matrice qui représente une rotation.

On a
$$\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(-\theta) & -\sin(-\theta)\\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta)\end{pmatrix}.$$
C'est donc aussi une matrice de rotation mais la rotation s'effectue dans le sens inverse de la rotation d'angle θ.

2. **Vrai ou faux (Justifier)**

   (a) **Toute matrice carrée de dimension 3 commute avec $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.**

   Faux : si on multiplie la matrice donnée notée A à gauche et à droite par une matrice quelconque notée B du type $\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$ dont les élements sont des complexes quelconques, on a, par exemple, que la troisième ligne de AB est le vecteur nul alors que la troisième ligne de BA a pour premier élément g.

(b) **La matrice** $\begin{pmatrix} a-b & a^2-ab+b^2 \\ a^2-b^2 & a^3-b^3 \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{C})$ **est inversible.**
Faux car le déterminant de cette matrice vaut 0 si $a = b$ ou si $b = 0$.

(c) **Si une matrice carrée A de dimension 2 est de déterminant nul, alors l'une des colonnes de A est multiple de l'autre.**
Vrai (cf. théorie).

(d) **Si deux lignes d'une matrice carrée A de dimension 3 sont identiques, alors** $\det A = 0$**.**
Vrai (cf. théorie).

(e) **Si A est une matrice carrée de dimension 3, alors** $\det(5A) = 5 \det A$**.**
Faux : $\det(5A) = 5^3 \det A = 125 \det A$.

(f) **Si B est la matrice obtenue en multipliant la ligne 3 d'une matrice carrée A de dimension 3 par 5, alors** $\det B = 5 \det A$**.**
Vrai (cf. théorie).

(g) **Si X est un vecteur propre de la matrice $2A$ alors c'est aussi un vecteur propre de A.**
Vrai car si $X \neq 0$ est tel que $2AX = \lambda X$ alors on a $AX = (\lambda/2)X$.

(h) **Si λ est une valeur propre de A alors λ^2 est valeur propre de A^2.**
Vrai car si $X \neq 0$ est tel que $AX = \lambda X$ alors on a $A^2X = A(AX) = A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda^2 X$.

(i) 0 **peut être valeur propre d'une matrice inversible.**
Faux car comme A est inversible, on a $\det(A) \neq 0$. Si $\lambda = 0$ alors $\det(A - \lambda X) = 0 \Leftrightarrow \det(A) = 0$ ce qui est absurde puisque $\det(A) \neq 0$.
Autre justification possible : si $X \neq 0$ est tel que $AX = 0X = 0$ et que A^{-1} existe alors $A^{-1}\ AX = A^{-1}\ 0 \Leftrightarrow X = 0$ ce qui est absurde puisque $X \neq 0$.

(j) **Si A est inversible, tout vecteur propre de A est aussi vecteur propre de son inverse.**
Vrai car si $X \neq 0$ est tel que $AX = \lambda X$ et si A^{-1} existe alors on a $A^{-1}(AX) = \lambda A^{-1}X \Leftrightarrow$ $X = \lambda A^{-1}X \Leftrightarrow A^{-1}X = (1/\lambda)X$, si $\lambda \neq 0$ ce qui est le cas car si A est inversible alors $\det(A) \neq 0$ et on sait que $\det(A)$ est égal au produit des valeurs propres de A.

(k) **Le carré d'une matrice est une matrice qui possède au moins un élément non nul.**
Faux car le carré de la matrice nulle est la matrice nulle.

(l) **Si A est diagonalisable, alors sa transposée l'est aussi.**
Vrai car si S est inversible tel que $S^{-1}AS = \Delta$ (Δ matrice diagonale) alors les transposées des deux membres sont des matrices égales et on a $\widetilde{S}\ \widetilde{A}\ \widetilde{S^{-1}} = \widetilde{\Delta} = \Delta \Leftrightarrow (\widetilde{S^{-1}})^{-1}\ \widetilde{A}\ \widetilde{S^{-1}} = \Delta$ $\Leftrightarrow T^{-1}\ \widetilde{A}\ T = \Delta$ si on pose $T = \widetilde{S^{-1}}$.

(m) **Si A est diagonalisable et inversible, alors l'inverse est aussi diagonalisable.**
Vrai car si A^{-1} existe et si S inversible est tel que $S^{-1}AS = \Delta$ (Δ matrice diagonale) alors $(S^{-1}AS)^{-1} = \Delta^{-1} \Leftrightarrow S^{-1}\ A^{-1}\ (S^{-1})^{-1} = \Delta^{-1} \Leftrightarrow S^{-1}\ A^{-1}\ S = \Delta^{-1}$ et l'inverse d'une matrice diagonale est une matrice diagonale.

(n) **Si A est diagonalisable, alors A^2 l'est aussi.**
Vrai car si S est inversible tel que $S^{-1}AS = \Delta$ (Δ matrice diagonale) alors $(S^{-1}AS)(S^{-1}AS) = \Delta^2$ et vu l'associativité du produit matriciel, on a $S^{-1}(AS\ S^{-1}A)S = S^{-1}A^2S = \Delta^2$ et le carré d'une matrice diagonale est un matrice diagonale.

(o) **Les valeurs propres de l'inverse d'une matrice inversible sont les inverses des valeurs propres de la matrice.**
Vrai car si A est inversible alors $\det(A) \neq 0$ et ses valeurs propres sont toutes non nulles puisque $\det(A)$ est égal au produit des valeurs propres de A. Si on a $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$ alors $A^{-1}AX = \lambda A^{-1}X \Leftrightarrow X = \lambda A^{-1}X \Leftrightarrow A^{-1}X = (1/\lambda)X$.

(p) **La somme de deux matrices diagonalisables est toujours une matrice diagonalisable.**
Faux car on a, par exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

les deux matrices du membre de gauche étant diagonalisables mais non celle du membre de droite.

3. **La cryptographie, pour beaucoup de monde, est un moyen de maintenir des communications privées. En effet, la protection des communications sensibles a été l'objectif principal de la cryptographie dans la grande partie de son histoire. Le *chiffrage* est la transformation des données dans une forme illisible. Son but est d'assurer la sécurité en maintenant l'information cachée aux gens à qui l'information n'est pas adressée, même ceux qui peuvent voir les données chiffrées. Le *déchiffrage* est l'inverse du chiffrage ; c'est la transformation des données chiffrées dans une forme intelligible.**
Aujourd'hui, les gouvernements emploient des méthodes sophistiquées de codage et de décodage des messages. Un type de code, qui est extrêmement difficile à déchiffrer, se sert d'une grande matrice pour coder un message. Le récepteur du message le décode en employant l'inverse de la matrice. Voici un exemple de codage/décodage d'un message par ce procédé.
Considérons le message

SUIS EN DANGER

ainsi que la matrice de codage

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = C.$$

Pour le codage, on assigne à chaque lettre de l'alphabet un nombre, à savoir simplement sa position dans l'alphabet, c'est-à-dire A correspond à 1**, B correspond à** $2, \ldots,$ **Z correspond à** 26**. En outre, on assigne le nombre** 27 **à un espace. Ainsi, le message devient :**

S	**U**	**I**	**S**	*****	**E**	**N**	*****	**D**	**A**	**N**	**G**	**E**	**R**
19	**21**	**9**	**19**	**27**	**5**	**14**	**27**	**4**	**1**	**14**	**7**	**5**	**18.**

Puisqu'on emploie une matrice 2×2**, on décompose la forme numérique de ce message en une suite de vecteurs**[2] 1×2 **:**

$$(19 \quad 21),\ (9 \quad 19),\ (27 \quad 5),\ (14 \quad 27),\ (4 \quad 1),\ (14 \quad 7),\ (5 \quad 18).$$

On code alors le message en multipliant chacun de ces vecteurs par la matrice de codage C**, ce qui peut être fait en définissant une matrice dont les lignes sont ces vecteurs et en multipliant cette dernière par** C**, ce qui nous donne :**

$$\begin{pmatrix} 19 & 21 \\ 9 & 19 \\ 27 & 5 \\ 14 & 27 \\ 4 & 1 \\ 14 & 7 \\ 5 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 25 \\ -10 & 39 \\ 22 & -39 \\ -13 & 53 \\ 3 & -5 \\ 7 & -7 \\ -13 & 44 \end{pmatrix}.$$

Dès lors, le message crypté est donné par les lignes de cette dernière matrice que l'on place bout à bout pour la transmission :

$$-2,\ 25,\ -10,\ 39,\ 22,\ -39,\ -13,\ 53,\ 3,\ -5,\ 7,\ -7,\ -13,\ 44.$$

2. Dans le cas où il faut compléter le dernier vecteur, il suffit d'y placer des ≪ 27 ≫, ce qui revient à compléter le message par des espaces pour avoir un nombre de caractères qui soit multiple de la dimension de la matrice de codage.

Enfin, pour décoder le message, le récepteur a recours à la même technique que celle employée pour le codage mais en utilisant l'inverse de la matrice de codage, qui est donnée ici par

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il doit donc calculer le produit

$$\begin{pmatrix} -2 & 25 \\ -10 & 39 \\ 22 & -39 \\ -13 & 53 \\ 3 & -5 \\ 7 & -7 \\ -13 & 44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 21 \\ 9 & 19 \\ 27 & 5 \\ 14 & 27 \\ 4 & 1 \\ 14 & 7 \\ 5 & 18 \end{pmatrix}$$

et il retrouve bien la matrice correspondant au message de départ, ce qui lui permet de lire le message :

19	**21**	**9**	**19**	**27**	**5**	**14**	**27**	**4**	**1**	**14**	**7**	**5**	**18**
S	**U**	**I**	**S**	*****	**E**	**N**	*****	**D**	**A**	**N**	**G**	**E**	**R.**

Le Gouvernement a réussi à intercepter le message crypté suivant, provenant de l'ennemi public n°1 et destiné à l'ennemi public n°2 :

$-18,\ -21,\ -31,\ 53,\ 48,\ 61,\ 3,\ -15,\ -21,\ -34,\ -30,\ -43,\ 45,\ 42,\ 48$**.**

L'un de ses meilleurs espions infiltrés, James Bond, a découvert que la matrice utilisée par l'ennemi pour coder ce message est la suivante :

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Malheureusement, il n'y connaît rien en calcul matriciel et personne ne peut déchiffrer ce message... Votre mission est de décoder ce message dans les plus brefs délais.

Solution. La matrice de décodage est donnée par l'inverse de la matrice de codage, c'est-à-dire la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ -4 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Le message est le suivant :

22	9	12	1	9	14	27	3	21	18	9	5	21	24	27
V	I	L	A	I	N	*	C	U	R	I	E	U	X	*.

Liste 5 : calcul matriciel (3) et représentation d'ensembles

I. Matrices de Leslie et stochastiques

1. **Un chef d'entreprise gère un portefeuille d'actions par cycle de trois ans. Chaque action lui fait gagner tellement qu'il peut en acheter 6 fois plus au cours de la deuxième année et dix fois plus au cours de la troisième année pour chaque action placée. En parallèle, après un an il revend la moitié des actions pour investir dans son entreprise et après 2 ans, il ne conserve que 40 % des actions restantes et revend les autres pour la même raison.**

   (a) Ecrire le système d'équations modélisant l'évolution de cette répartition des actions selon leur durée de placement (un an, deux ans, trois ans) en indiquant quelle est la matrice de Leslie de celle-ci.
   (b) Comment va évoluer la composition du portefeuille ?
   (c) Quelle est la répartition idéale qui permet de doubler chaque nombre d'actions de chaque type sur un an ?

   On désigne par x_1, x_2, x_3 le nombre d'actions placées respectivement depuis un an, deux ans, trois ans. L'année suivante, la répartition des actions sera de $6x_2 + 10x_3$ actions placées depuis un an, $x_1/2$ actions placées depuis deux ans et $2x_2/5$ actions placées depuis trois ans. Si on note $x_1(n), x_2(n), x_3(n)$ la répartition l'année n, cela donne le système

$$\begin{pmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \\ x_3(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \end{pmatrix}.$$

   La matrice de Leslie

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 \end{pmatrix}$$

   est régulière (les éléments de L^5 sont strictement positifs).
   Les valeurs propres de L sont 2 et -1 et les vecteurs propres de valeur propres 2 sont

$$c \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   avec $c \in \mathbb{C}_0$.
   Vu le théorème de Perron-Frobenius, le nombre d'actions de chaque type a tendance à doubler chaque année, de même que le total de toutes celles-ci car

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_k(n+1)}{x_k(n)} = 2 \ \forall k = 1,2,3, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{x_1(n+1) + x_2(n+1) + x_3(n+1)}{x_1(n) + x_2(n) + x_3(n)} = 2$$

   et les proportions de chaque type d'action dans le portefeuille se rapprochent de $20/26, 5/26, 1/26$.

2. **L'institut météorologique a fait les observations suivantes :**
   — on n'a jamais vu deux jours ensoleillés consécutifs,
   — s'il fait beau un jour donné, on a une chance égale d'avoir de la pluie ou de la neige le lendemain,
   — s'il pleut ou s'il neige, on a une chance sur deux que le temps se maintienne le jour suivant et une chance sur quatre qu'il fasse beau le lendemain.

Sachant cela,

(a) **Représenter la matrice de transition de ce système.**

(b) **Sachant qu'il fait beau aujourd'hui, quel pourcentage de chance a-t-on qu'il fasse beau dans deux jours ?**

(c) **A long terme, quelle sera l'évolution du climat ?**

(a) Si on note N_0, P_0 et S_0 respectivement un jour de neige, un jour de pluie et un jour de soleil au départ et N_1, P_1 et S_1 la météo correspondante le jour suivant, on a

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ P_1 \\ S_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_0 \\ P_0 \\ S_0 \end{pmatrix}$$

et la matrice de dimension 3 est la matrice de transition du système.
(b) Sachant qu'il fait beau aujourd'hui, on a 25 % de chance qu'il fasse beau dans 2 jours.

(c) Le vecteur de probabilité de valeur propre 1 est égal à $\begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,4 \\ 0,2 \end{pmatrix}$. A long terme, on 4 chances sur 10 qu'il neige ou qu'il pleuve et 2 chances sur 10 qu'il fasse ensoleillé.

3. **Dans un laboratoire, à chaque repas, des lapins ont le choix entre manger des carottes, de la salade ou des pissenlits mais ne peuvent manger qu'un aliment d'une seule catégorie lors d'un même repas. Comme ils sont gourmands, ils ne manquent jamais un repas.**
L'observation montre que si un lapin a mangé des carottes à un repas, il en mangera au repas suivant dans 70 % des cas ; sinon, il mangera de la salade une fois sur 5 ou des pissenlits 1 fois sur 10.
S'il a mangé de la salade, il en mangera encore 6 fois sur 10 au repas suivant ; sinon, il mangera un des deux autres aliments de façon équiprobable.
Enfin, s'il a mangé des pissenlits, au repas suivant il y a 1 chance sur 5 qu'il mange des carottes et 2 chances sur 5 de la salade.

(a) **Si un lapin vient de manger des carottes, quelle est la probabilité qu'il mange de la salade dans deux repas ?**

(b) **A longue échéance, que mange ce lapin ?**

(a) La probabilité pour que le lapin mange de la salade dans 2 repas vaut $0,3$.
(b) A longue échéance, le lapin mange des carottes ou de la salade avec une probabilité de $2/5$, des pissenlits avec une probabilité de $1/5$.

4. **Un individu vit dans un milieu où il est susceptible d'attrapper une maladie par piqûre d'insecte. Il peut être dans l'un des trois états suivants : immunisé (I), malade (M), non malade et non immunisé (S). D'un mois à l'autre, son état peut changer selon les règles suivantes :**
   - **étant immunisé, il peut le rester avec une probabilité $0,9$ ou passer à l'état S avec une probabilité $0,1$;**
   - **étant dans l'état S, il peut le rester avec une probabilité $0,5$ ou passer à l'état M avec une probabilité $0,1$;**
   - **étant malade, il peut le rester avec une probabilité $0,2$ ou passer à l'état S avec une probabilité $0,8$.**

   Déterminer

   a) la matrice de transition du système ;

Notons respectivement I_0, M_0 et S_0 les probabilités qu'un individu soit immunisé, malade, non malade et non immunisé un jour donné. Le mois suivant, ces probabilités sont respectivement données par

$$\left\{\begin{array}{lll} I_1 & = & 0,9\,I_0 + 0,4\,S_0 + 0\,M_0 \\ S_1 & = & 0,1\,I_0 + 0,5\,S_0 + 0,8\,M_0 \\ M_1 & = & 0\,I_0 + 0,1\,S_0 + 0,2\,M_0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} I_1 \\ S_1 \\ M_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 & 0 \\ 0,1 & 0,5 & 0,8 \\ 0 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}}_{:=T} \begin{pmatrix} I_0 \\ S_0 \\ M_0 \end{pmatrix}.$$

Donc, la matrice de transition du système est donnée par la matrice T.

b) **la probabilité qu'un individu immunisé soit encore immunisé après deux mois ;**

Si un individu est immunisé un jour donné, la probabilité qu'il soit immunisé deux mois plus tard est de 85%.

c) **la probabilité qu'à long terme, un individu soit immunisé.**

A long terme, la probabilité qu'un individu soit immunisé est donnée par $\frac{32}{41}$, c'est-à-dire environ 78%.

5. **Un biologiste étudie le passage d'une molécule de phosphore dans un écosystème. Celle-ci peut se trouver dans le sol, dans l'herbe, dans le bétail ou peut disparaître de l'écosystème. D'une heure à l'autre, le transfert peut s'effectuer selon les modalités suivantes :**
   - **étant dans le sol, la molécule a** 3 **chances sur** 5 **d'y rester,** 3 **chances sur** 10 **de passer dans l'herbe et** 1 **chance sur** 10 **de disparaître ;**
   - **étant dans l'herbe, elle a** 1 **chance sur** 10 **de revenir dans le sol,** 2 **chances sur** 5 **de rester dans l'herbe et** 1 **chance sur** 2 **de se retrouver dans le bétail ;**
   - **étant dans le bétail, elle a** 3 **chances sur** 4 **de retourner dans le sol,** 1 **chance sur** 5 **de rester dans le bétail et** 1 **chance sur** 20 **de disparaître ;**
   - **si la molécule disparaît, elle ne réapparaît plus nulle part.**

   Déterminer la matrice de transition du système.

Notons respectivement S_0, H_0, B_0 et D_0 les probabilités qu'une molécule de phosphore se trouve dans le sol, dans l'herbe, dans le bétail et disparaisse à une heure donnée. L'heure suivante, ces probabilités sont respectivement données par

$$\left\{\begin{array}{lll} S_1 & = & \frac{3}{5}S_0 + \frac{1}{10}H_0 + \frac{3}{4}B_0 + 0D_0 \\ H_1 & = & \frac{3}{10}S_0 + \frac{2}{5}H_0 + 0B_0 + 0D_0 \\ B_1 & = & 0S_0 + \frac{1}{2}H_0 + \frac{1}{5}B_0 + 0D_0 \\ D_1 & = & \frac{1}{10}S_0 + 0H_0 + \frac{1}{20}B_0 + 1D_0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} S_1 \\ H_1 \\ B_1 \\ D_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{10} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{20} & 1 \end{pmatrix}}_{:=T} \begin{pmatrix} S_0 \\ H_0 \\ B_0 \\ D_0 \end{pmatrix}.$$

Donc, la matrice de transition du système est donnée par la matrice T.

6. **Depuis des mois, un laborantin de l'ile de Rêve travaille sur une substance, appelée KillCovid, très prometteuse pour la découverte d'un médicament qui permettrait de détruire le virus responsable de la maladie Covid. Le KillCovid n'a malheureusement qu'une durée de vie de deux mois.**

   Le laborantin a trouvé le moyen de se servir de ce KillCovid comme catalyseur pour en produire du nouveau, à partir d'autres substances communes tenues secrètes. Il récupère donc le KillCovid utilisé à la fin du processus. Chaque mois, en utilisant 1 dose de KillCovid d'un mois, il produit 1/2 dose de nouveau KillCovid et la proportion est la même avec le KillCovid de deux mois.

(a) Ecrire le système d'équations modélisant l'évolution du stock de KillCovid (stock âgé d'un mois et stock âgé de deux mois), en spécifiant la matrice de Leslie correspondante.
(b) Comment va évoluer le stock de KillCovid ?

Soient $x(n)$ le nombre de doses de KillCovid d'un mois et $y(n)$ celui de deux mois au mois numéro n. On a le système :

$$\begin{pmatrix} x(n+1) \\ y(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(n) \\ y(n) \end{pmatrix}.$$

La matrice de Leslie

$$L = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est régulière (les éléments de L^2 sont strictement positifs).
Les valeurs propres de L sont 1 et $-1/2$ et les vecteurs propres de valeur propre 1 sont

$$c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec $c \in \mathbb{C}_0$.
Vu le théorème de Perron-Frobenius, le nombre de doses a tendance à se stabiliser de même que le total car

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x(n+1)}{x(n)} = 1 \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{y(n+1)}{y(n)} = 1 \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{x(n+1)+y(n+1)}{x(n)+y(n)} = 1.$$

7. **Les baleines bleues sont une espèce de mammifères en voie d'extinction à cause notamment de non respect de règles de pêche. Tous les 20 ans, des chercheurs recensent leur population (une estimation bien sûr) et font la répartition entre le nombre de baleines femelles de moins de 20 ans (les ≪ jeunes ≫) et celui des baleines femelles de strictement plus de 20 ans (les ≪ vieilles ≫). Ils ont trouvé le moyen de marquer les deux catégories de telle sorte que l'on puisse reconnaître les jeunes nés d'une mère de moins de 20 ans et ceux nés d'une mère de plus de 20 ans. Le comptage des baleines femelles actuellement donne les résultats suivants :** $1/3$ **des baleines femelles ≪ jeunes ≫ ont donné naissance à un petit (survivant) et** $5/8$ **des baleines ≪ vieilles ≫ l'ont fait. De plus, seulement** $1/6$ **des baleines ≪ jeunes ≫ et seulement la moitié des baleines ≪ vieilles ≫ ont survécu.**
On suppose que les paramètres sont valables à grande échelle de temps...

(a) Ecrire le système d'équations modélisant l'évolution des deux catégories de baleines, en spécifiant la matrice de Leslie correspondante.
(b) Comment va évoluer la population ?
(c) Pourquoi peut-on dire que l'espèce est en voie d'extinction ?

Soient $x(n)$ le nombre de baleines femelles ≪ jeunes ≫ et $y(n)$ celui des baleines femelles ≪ vieilles ≫ lors du comptage numéro n. On a le système :

$$\begin{pmatrix} x(n+1) \\ y(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 5/8 \\ 1/6 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(n) \\ y(n) \end{pmatrix}.$$

La matrice de Leslie

$$L = \begin{pmatrix} 1/3 & 5/8 \\ 1/6 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

est régulière.

Les valeurs propres de L sont $3/4$ et $1/12$ et les vecteurs propres de valeur propre $3/4$ sont

$$c\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

avec $c \in \mathbb{C}_0$.
Vu le théorème de Perron-Frobenius, le nombre de baleines de chaque catégorie, de même que le total évolue selon

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x(n+1)}{x(n)} = 3/4 \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{y(n+1)}{y(n)} = 3/4 \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{x(n+1)+y(n+1)}{x(n)+y(n)} = 1.$$

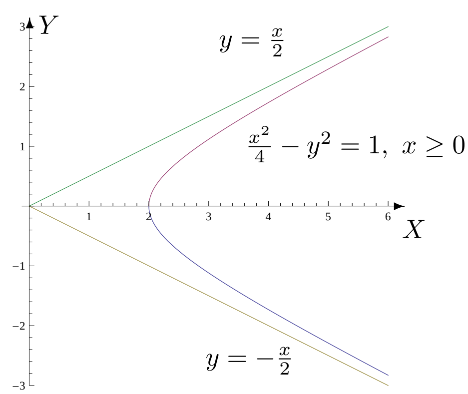
La répartition de la population selon les deux catégories évolue vers la répartition $3/5$, $2/5$.
Comme $3/4 < 1$, la population est donc en voie d'extinction.

II. Représentation d'ensembles

1. **Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble**

$$\{(2\sqrt{1+x^2}, x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

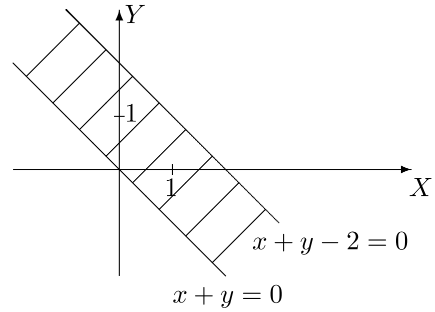
a) Donner des équations paramétriques de la courbe définie par cet ensemble.
Des équations paramétriques de cette courbe sont $\begin{cases} x = 2\sqrt{1+t^2} \\ y = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$.
b) Eliminer le paramètre pour obtenir une équation cartésienne.
En éliminant le paramètre, on obtient l'équation $x = 2\sqrt{1+y^2},\ y \in \mathbb{R}$.
c) Transformer l'équation obtenue en une autre équivalente qui ressemble à une équation connue.
L'équation précédente se transforme en $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ avec $x \geq 0$.
d) Représenter graphiquement la courbe.



2. **Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble**

$$\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, |x+y-1| \leq 1\}.$$

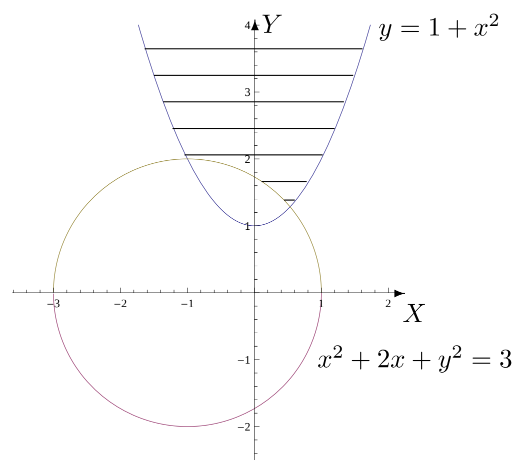
a) Si la valeur absolue d'un nombre vaut 1, que vaut ce nombre ?
Ce nombre vaut 1 ou -1.
b) Comment écrire $|x+y-1| = 1$ de façon équivalente ?
L'équation $|x+y-1| = 1$ est équivalente à $x+y-2 = 0$ ou $x+y = 0$.
c) Représenter graphiquement la (les) équation(s) obtenue(s) ci-dessus.
d) Déterminer la(les) région(s) du plan qui correspond(ent) à l'ensemble donné en la(les) hachurant. Les points des « bords » sont-ils compris dans l'ensemble ?
Les points des « bords » sont compris dans l'ensemble.



3. **Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble**

$$\left\{(x,y) : x,y \in \mathbb{R},\ y \geq 1+x^2 \text{ et } x^2+2x+y^2 \geq 3\right\}.$$

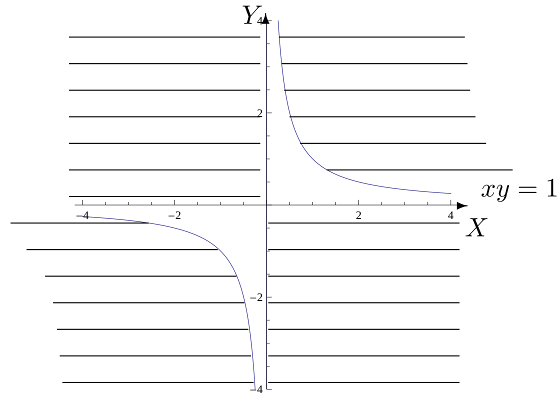
a) Représenter la courbe d'équation $y = 1+x^2$ ainsi que celle d'équation $x^2+2x+y^2 = 3$.
b) Déterminer la région du plan qui correspond à $y \geq 1+x^2$.
c) Déterminer la(les) région(s) du plan qui correspond(ent) à $x^2+2x+y^2 \geq 3$.
d) Hachurer la(les) région(s) du plan qui correspond(ent) à l'ensemble donné. Les points des « bords » sont-ils compris dans l'ensemble ?
Les points des « bords » sont compris dans l'ensemble.



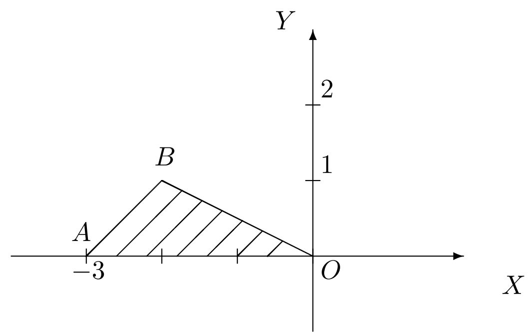
4. **Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble**

$$\left\{(x,y) : x,y \in \mathbb{R},\ \frac{1}{xy} \leq 1\right\}.$$

a) A la lecture de l'énoncé, ne peut-on pas déterminer immédiatement des points du plan comme n'appartenant pas à l'ensemble ? Si oui, lesquels ?
Puisque $xy \neq 0$, les points des axes ne peuvent appartenir à l'ensemble.
b) Représenter la courbe correspondant à l'égalité.
c) Hachurer la(les) région(s) du plan qui correspond(ent) à l'ensemble donné. Les points des « bords » sont-ils compris dans l'ensemble ?
Les points de l'hyperbole sont compris dans l'ensemble mais non les points des axes.



5. **Décrire analytiquement l'ensemble E hachuré suivant, les points du bord étant compris dans l'ensemble.**



a) Donner les coordonnées cartésiennes des sommets du triangle ABO.
Les coordonnées des sommets sont les suivantes : $A(-3,0)$, $B(-2,1)$ et $O(0,0)$.
b) Déterminer les équations cartésiennes des droites AB, BO et AO.
La droite AB a pour équation cartésienne $x-y+3=0$.
L'équation de BO est $x+2y=0$ et celle de AO est $y=0$.
c) Décrire analytiquement l'ensemble E comme dans les exercices ci-dessus.
On a $\quad E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\le x+3,\ y\le -\frac{x}{2},\ y\ge 0\}$.
d) Quel est l'ensemble de variation des ordonnées des points de E ?
L'ensemble de variation des ordonnées des points de E est $[0,1]$.
e) Si on fixe une valeur quelconque de y dans cet ensemble, quel est l'ensemble de variation des abscisses des points de E ?
Pour un y fixé dans $[0,1]$, l'ensemble de variation des abscisses des points de E est $[y-3,-2y]$.
f) Donner une description analytique de E autre que celle donnée en c) en se servant des deux items précédents.
On peut aussi décrire analytiquement E par $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in[0,1],\ x\in[y-3,-2y]\}$.
g) Quel est l'ensemble de variation des abscisses des points de E ?
L'ensemble de variation des abscisses des points de E est $[-3,0]$.
h) Si on fixe une valeur quelconque de x dans cet ensemble, peut-on donner l'ensemble de variation des ordonnées des points de E ? Si oui, le donner. Si non, que doit-on faire ?
Non, y ne varie pas entre les mêmes bornes si $x\in[-3,-2]$ ou si $x\in[-2,0]$.
Si x est fixé dans $[-3,-2]$ alors y varie dans $[0,x+3]$ et si x est fixé dans $[-2,0]$ alors y varie dans $[0,-\frac{x}{2}]$.
i) Donner une description analytique de E autre que celles données en c) et en f) en se servant des deux items précédents.
On a aussi la description suivante

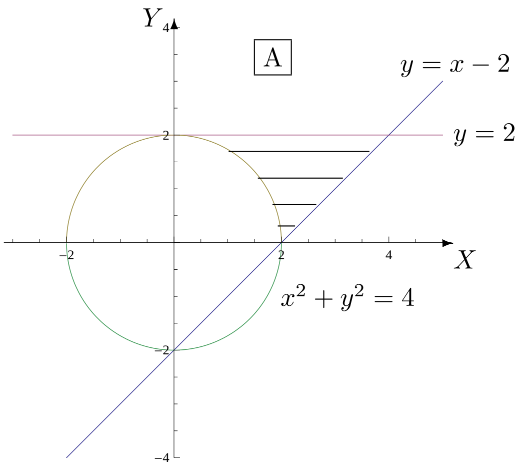
$$E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[-3,-2],\ y\in[0,x+3]\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[-2,0],\ y\in\left[0,-\frac{x}{2}\right]\right\}.$$

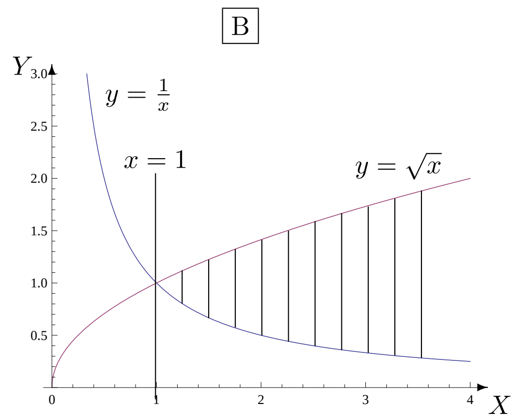
6. **Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement les ensembles A et B si**

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ x - 2 \leq y \leq 2,\ x^2 + y^2 \geq 4\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1,\ \frac{1}{x} \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$

Pour chacun de ces 2 ensembles,
a) déterminer leur ensemble X (respectivement Y) de variation des abscisses (resp. des ordonnées)
b) à abscisse (resp. ordonnée) fixée dans X (resp. Y) donner l'ensemble de variation des ordonnées (resp. des abscisses) de leurs points
c) donner 2 descriptions analytiques en se servant des 2 items précédents.





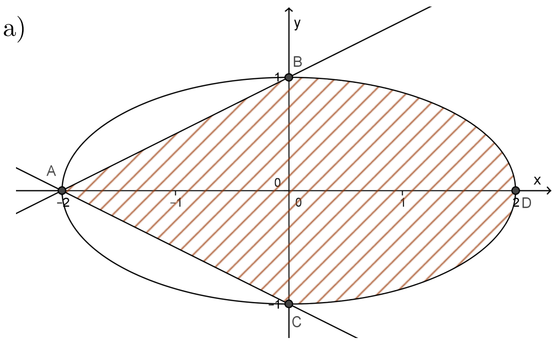
Les points des bords sont compris dans A et dans B.

Pour A :
a) $X = [0, 4]$ et $Y = [0, 2]$.
b) si x fixé dans $[0, 2]$ alors les ordonnées varient dans $[\sqrt{4 - x^2}, 2]$
si x fixé dans $[2, 4]$ alors les ordonnées varient dans $[x - 2, 2]$.
si y fixé dans Y alors les abscisses varient dans $[\sqrt{4 - y^2}, y + 2]$.
c) on a
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 2],\ y \in [\sqrt{4 - x^2}, 2]\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [2, 4],\ y \in [x - 2, 2]\}$
$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 2],\ x \in [\sqrt{4 - y^2}, y + 2]$.

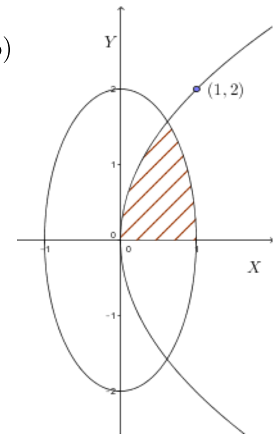
Pour B :
a) $X = [1, +\infty[$ et $Y =]0, +\infty[$.
b) si x fixé dans X alors les ordonnées varient dans $[\frac{1}{x}, \sqrt{x}]$.
si y fixé dans $]0, 1]$ alors les abscisses varient dans $[\frac{1}{y}, +\infty[$
si y fixé dans $[1, +\infty[$ alors les abscisses varient dans $[y^2, +\infty[$.
c) on a
$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1, +\infty[,\ y \in [\frac{1}{x}, \sqrt{x}]\}$
$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in]0, 1],\ x \in [\frac{1}{y}, +\infty[\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [1, +\infty[,\ x \in [y^2, +\infty[\}$.

7. **Décrire analytiquement l'ensemble borné fermé hachuré suivant en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses.**
Faire de même en commençant par l'ensemble de variation des abscisses.

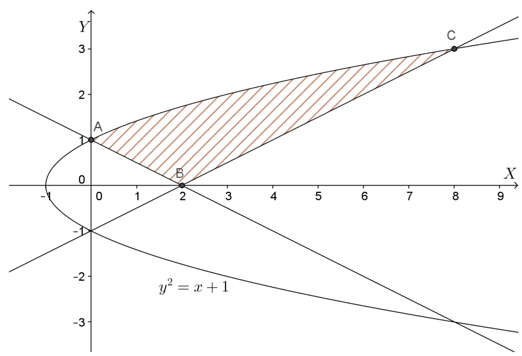
a)



b)



c)



a) Les points A, B, C et D ont respectivement pour coordonnées $(-2, 0), (0, 1), (0, -1)$ et $(2, 0)$. Les droites qui délimitent l'ensemble ont pour équation $AB \equiv x-2y+2 = 0$, $AC \equiv x+2y+2 = 0$, et l'ellipse a pour équation $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ou encore $x^2 + 4y^2 = 4$.
Dès lors, l'ensemble fermé hachuré est décrit analytiquement par

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1,0],\ x \in \left[-2y-2, 2\sqrt{1-y^2}\right]\right\}$$
$$\cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1],\ x \in \left[2y-2, 2\sqrt{1-y^2}\right]\right\}$$

ou encore par

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2,0],\ y \in \left[\tfrac{-x-2}{2}, \tfrac{x+2}{2}\right]\right\}$$
$$\cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,2],\ y \in \left[\tfrac{-\sqrt{4-x^2}}{2}, \tfrac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right]\right\}.$$

b) L'ellipse a pour équation $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ ou encore $4x^2 + y^2 = 4$. la branche de la parabole qui comprend le point de coordonnées $(1, 2)$ a pour équation $y = 2\sqrt{x}$. Le point d'intersection entre les deux courbes est le point de coordonnées $(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \sqrt{-2+2\sqrt{5}})$.
Dès lors, l'ensemble fermé hachuré est décrit analytiquement par

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \left[0, \sqrt{-2+2\sqrt{5}}\right],\ x \in \left[\frac{y^2}{4}, \frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right]\right\}$$

ou encore par

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[0, \tfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right],\ y \in [0, 2\sqrt{x}]\right\}$$
$$\cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[\tfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1\right],\ y \in \left[0, 2\sqrt{1-x^2}\right]\right\}.$$

c) Les points A, B et C ont respectivement pour coordonnées $(0, 1), (2, 0)$ et $(8, 3)$. Les droites qui délimitent l'ensemble ont pour équation $AB : x + 2y - 2 = 0$, $BC : x - 2y - 2 = 0$, et la parabole

a pour équation $y^2 - 1 = x$.
Dès lors, l'ensemble fermé hachuré est décrit analytiquement par

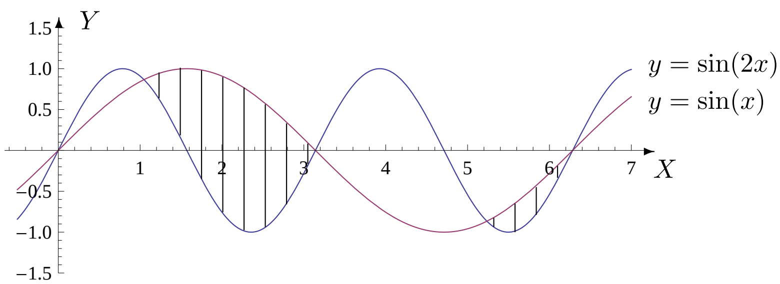
$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1],\ x \in [-2y+2, 2y+2]\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [1,3],\ x \in \left[y^2-1, 2y+2\right]\right\}$$

ou encore par

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,2],\ y \in \left[\frac{-x}{2}+1, \sqrt{x+1}\right]\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [2,8],\ y \in \left[\frac{x}{2}-1, \sqrt{x+1}\right]\right\}.$$

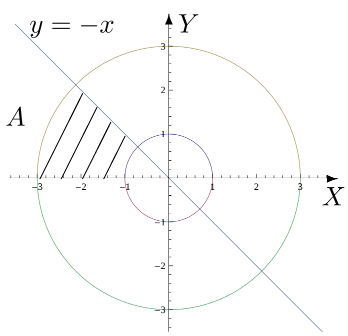
8. **On donne l'ensemble B suivant. Représenter graphiquement celui-ci en le hachurant.**

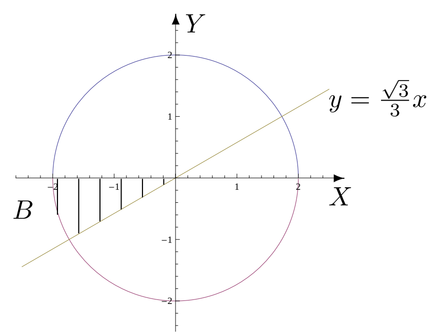
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 2\pi],\ \sin(2x) \leq y \leq \sin(x)\}.$$



Les points des « bords » sont compris dans l'ensemble.

9. **En utilisant les coordonnées polaires, décrire analytiquement les ensembles hachurés suivants, les points des bords étant compris dans A mais non dans B.**





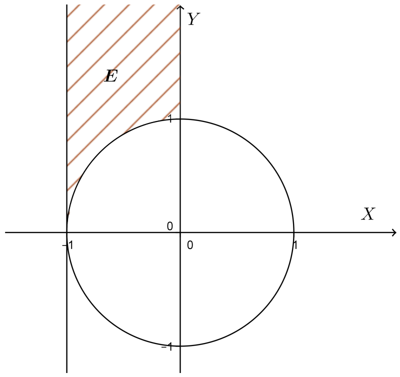
Les ensembles A et B exprimés en coordonnées polaires sont respectivement

$$A' = \left\{(r,\theta) : r \in [1,3],\ \theta \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]\right\} \quad \text{et} \quad B' = \left\{(r,\theta) : r \in]0,2[,\ \theta \in \left]\pi, \frac{7\pi}{6}\right[\right\}.$$

10. **Dans un repère orthonormé du plan, représenter, en le hachurant, l'ensemble dont une description analytique est**

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 > 1\}.$$

Ensuite, décrire analytiquement cet ensemble en utilisant les coordonnées polaires.



Les points des bords sont exclus de l'ensemble.
L'ensemble E exprimé en coordonnées polaires est

$$E' = \left\{ (r, \theta) : \theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[, \ r \in \left] 1, \frac{-1}{\cos(\theta)} \right[\right\}.$$

Liste 6 : fonctions de plusieurs variables (1)

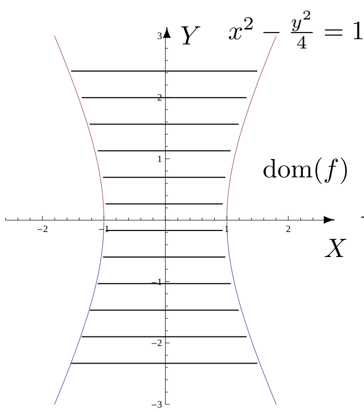
I. Définitions et représentations graphiques

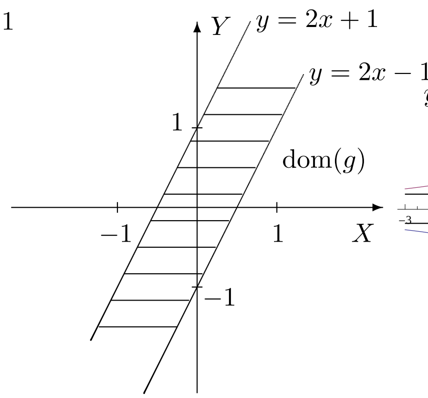
1. **Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous et le représenter.**

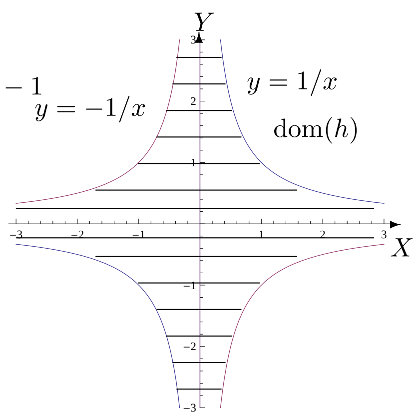
$$f(x,y) = \ln\left(\frac{y^2}{4} - x^2 + 1\right), \quad g(x,y) = \sqrt{1 - |2x-y|}, \quad h(x,y) = \arcos(xy).$$

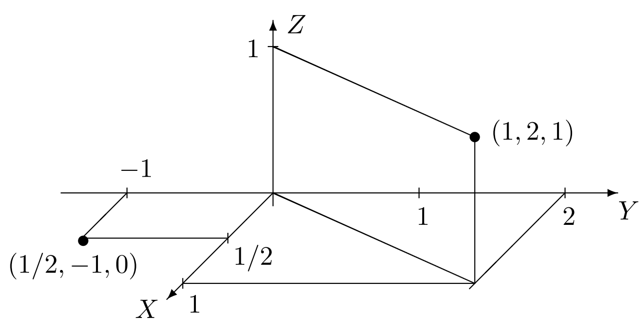
S'il appartient au domaine de définition, donner l'image de $(1/2,-1)$ **par** f**, de** $(1,2)$ **par** g **et de** $(2,1)$ **par** h**. Dans un repère orthonormé de l'espace, représenter ces points et leur image éventuelle.**

Les domaines de définition sont les suivants :
• $\mathrm{dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y^2}{4} - x^2 + 1 > 0\}$; sa représentation graphique est la région hachurée, les points de l'hyperbole étant exclus de l'ensemble. Comme $(1/2,-1)$ appartient à $\mathrm{dom}(f)$, on a $f(1/2,-1) = 0$.
• $\mathrm{dom}(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq 2x - y \leq 1\}$; sa représentation graphique est la région hachurée, les points des droites sont compris dans l'ensemble. Comme $(1,2)$ appartient à $\mathrm{dom}(g)$, on a $g(1,2) = 1$.
• $\mathrm{dom}(h) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq xy \leq 1\}$; sa représentation graphique est la région hachurée, les points des hyperboles sont compris dans l'ensemble. Comme $(2,1)$ n'appartient pas à $\mathrm{dom}(h)$, h n'est pas défini en ce point.

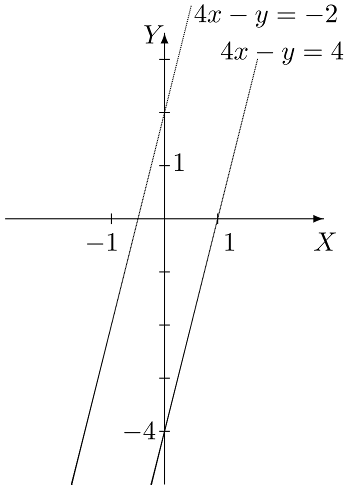


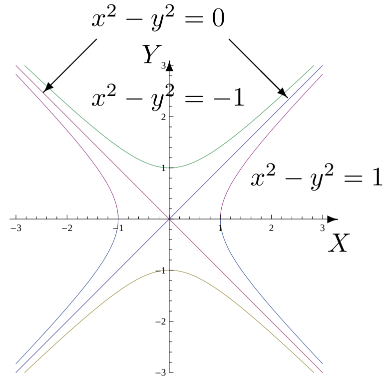


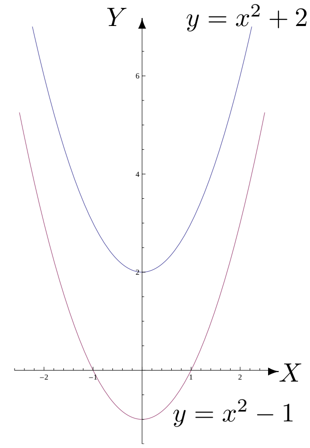




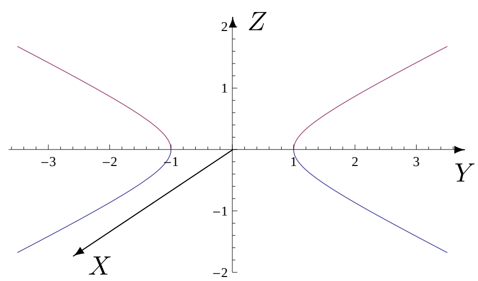
2. **Dans chacun des cas suivants, représenter les courbes de niveau d'équation** $f(x,y) = c$ **si**
a) $f(x,y) = 4x - y$ et $c = -2,\ 4$
b) $f(x,y) = x^2 - y^2$ et $c = -1,\ 0,\ 1$
c) $f(x,y) = x^2 - y$ et $c = -2,\ 1.$





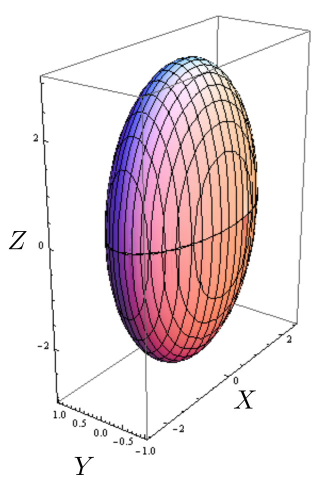


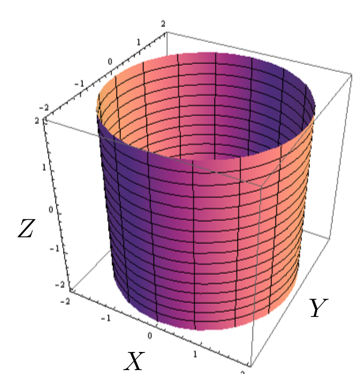
3. **On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé ; on appelle X, Y, Z les trois axes de celui-ci. Représenter la trace de la surface d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 4z^2 = 1$ dans le plan d'équation $z = 0$ puis dans celui d'équation $x = 0$. Comment appelle-t-on chacune de ces courbes ? Quelle est la nature de cette quadrique ?**
La trace dans le plan d'équation $z = 0$ est le cercle centré à l'origine du repère et de rayon 1 ; celle dans le plan d'équation $x = 0$ est une hyperbole d'équation cartésienne $y^2 - 4z^2 = 1$ (cf. graphique). Cette quadrique est un hyperboloïde à une nappe.



4. **Esquisser les représentations graphiques des surfaces quadriques dont les équations cartésiennes sont**

$$a)\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1 \qquad\qquad b) x^2 + y^2 = 4.$$





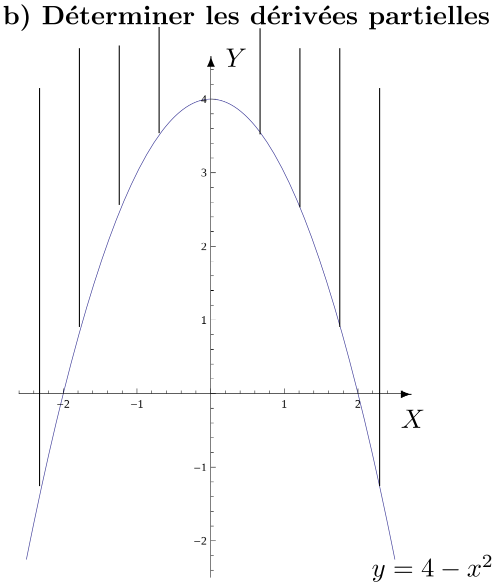
II. Dérivation et gradient

1. **En appliquant la définition des dérivées, montrer que la fonction f donnée explicitement par $f(x,y) = 3x^2 + xy,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ est dérivable par rapport à sa première variable au point $(-1,2)$ et donner la valeur de cette dérivée partielle en ce point.**
La fonction f est dérivable par rapport à sa première variable au point $(-1,2)$ et sa dérivée partielle en ce point vaut -4.

2. **On donne les fonctions f, g et h par**

$$f(x,y) = \ln(x^2 - 4 + y), \quad g(x,y) = \cos(x^2y^2 + 4y) \quad \textbf{et} \quad h(x,y) = x^2\, e^{-\frac{x}{y}}.$$

a) Déterminer leur domaine de définition, de dérivabilité et les représenter dans un repère orthonormé.
b) Déterminer les dérivées partielles de ces fonctions.



Pour la fonction f, les 2 domaines sont égaux à $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y - 4 > 0\}$.
La représentation graphique de cet ensemble est la région hachurée, les points de la parabole étant exclus de l'ensemble. Les dérivées partielles sont données par

$$D_x f(x,y) = \frac{2x}{x^2 + y - 4}$$

et

$$D_y f(x,y) = \frac{1}{x^2 + y - 4}.$$

Pour la fonction g, les 2 domaines sont égaux à $\mathbb{R}^2$: ce sont tous les points du plan.
Les dérivées partielles sont données par

$$D_x g(x,y) = -2xy^2 \sin(x^2y^2 + 4y) \qquad \text{et} \qquad D_y g(x,y) = -(2x^2y + 4)\sin(x^2y^2 + 4y).$$

Pour la fonction h, les 2 domaines sont égaux à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : y = 0\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0$: ce sont tous les points du plan sauf ceux de l'axe des abscisses. Les dérivées partielles sont données par

$$D_x h(x,y) = \left(2x - \frac{x^2}{y}\right) e^{-\frac{x}{y}} \qquad \text{et} \qquad D_y h(x,y) = \frac{x^3}{y^2}\, e^{-\frac{x}{y}}.$$

3. **On donne la fonction f par $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2 + 4y^2})$.**
a) Déterminer son domaine de définition et d'infinie dérivabilité.
b) Dans le domaine d'infinie dérivabilité, calculer $D_x^2 f + D_y^2 f$.

Les 2 domaines sont égaux à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et on a $D_x^2 f(x,y) + D_y^2 f(x,y) = \dfrac{3(x^2 - 4y^2)}{(x^2 + 4y^2)^2}$.

4. **a) Déterminer le gradient de la fonction f donnée par $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2\, x_2 \sin(3x_3)$.**
b) Même question pour la fonction g donnée par $g(x,y,z) = x^2 e^{xy^2\sqrt{z}}$.
a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^3$ et son gradient est le vecteur de composantes

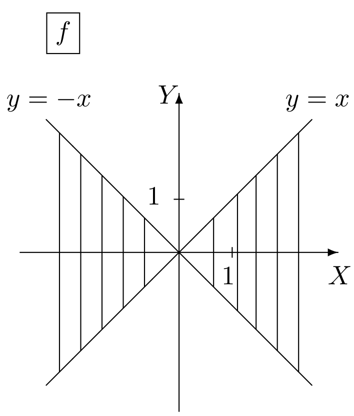
$$(2x_1x_2 \sin(3x_3),\ x_1^2 \sin(3x_3),\ 3x_1^2x_2 \cos(3x_3)).$$

b) La fonction g est dérivable sur $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$ et son gradient est le vecteur de composantes
$$\left((2x + x^2y^2\sqrt{z})e^{xy^2\sqrt{z}},\ 2x^3y\sqrt{z}\, e^{xy^2\sqrt{z}},\ \frac{x^3y^2}{2\sqrt{z}}\, e^{xy^2\sqrt{z}}\right).$$

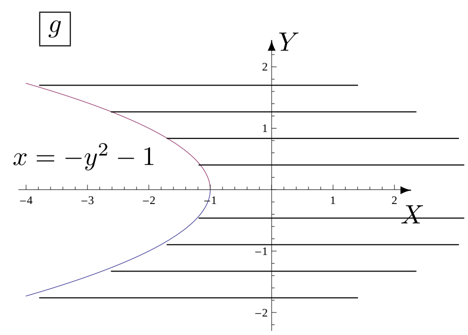
5. **On donne les fonctions f et g respectivement par**
$$f(x,y) = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right) \qquad g(x,y) = \exp(\sqrt{x+y^2+1}).$$

a) Déterminer le domaine de définition A et d'infinie dérivabilité B de ces fonctions. Représenter ces domaines.
b) Déterminer l'expression explicite de $|x|D_xf(x,y) + |y|D_yf(x,y)$.
c) Déterminer l'expression explicite de $F(t) = f\left(\frac{1}{t}, t\right)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée.
d) Déterminer l'expression explicite de $G(t) = g(\sin^2(t), \cos(t))$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée.

a) Pour f, on a $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le \frac{y}{x} \le 1,\ x \neq 0\}$ et
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < \tfrac{y}{x} < 1,\ x \neq 0\}.$$
Pour g, on a $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y^2+1 \ge 0\}$ et $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y^2+1 > 0\}$.
Voici les représentations graphiques de ces ensembles (parties hachurées) :



Les points des droites sont compris dans A, sauf l'origine du repère.
Les points des droites sont exclus de B.



Les points de la parabole sont compris dans l'ensemble A mais non dans B.

b) On a
$$|x|D_xf(x,y) + |y|D_yf(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad xy \ge 0 \\ \dfrac{-2y}{\sqrt{x^2-y^2}} & \text{si} \quad xy < 0. \end{cases}$$

c) L'expression explicite de $F(t) = f\left(\frac{1}{t}, t\right)$ est donnée par $F(t) = \arcsin(t^2)$; si on considère F sans faire référence à la composition, son domaine de dérivabilité est $]-1,1[$ mais si on tient compte de la composition alors on doit retirer 0 du domaine de dérivabilité. La dérivée de F est
$$DF(t) = \frac{2t}{\sqrt{1-t^4}}.$$

d) L'expression explicite de $G(t) = g(\sin^2(t), \cos(t))$ est donnée par $G(t) = \exp(\sqrt{2})$; son domaine de dérivabilité est $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $DG(t) = 0$.

6. **On donne la fonction $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.**
   a) Déterminer son domaine de définition A et celui d'infinie dérivabilité B.
   b) Si on définit F par $F(x,y) = f(x,y)(D_x^2 f(x,y) + D_y^2 f(x,y))$, $(x,y) \in B$, montrer que F est une fonction constante et déterminer cette constante.

   On a $A = \mathbb{R}^2$ et $B = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et F est la fonction constante 1.

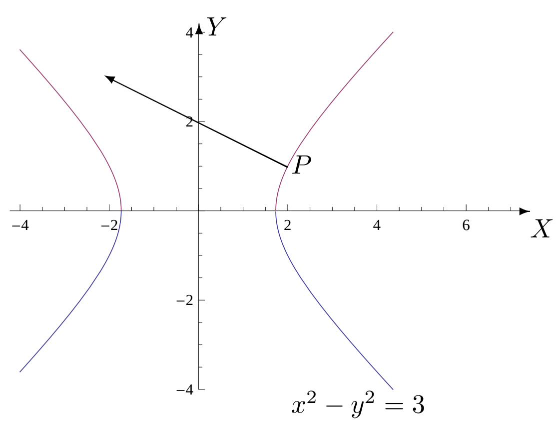
7. **On donne la fonction $f(x,y) = \sin(ax)\cos(by)$ où a et b sont des constantes réelles non nulles. Montrer que f vérifie l'équation des ondes $D_x^2 f - \dfrac{a^2}{b^2} D_y^2 f = 0$.**
   La fonction f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}^2$ et vérifie bien l'équation des ondes.

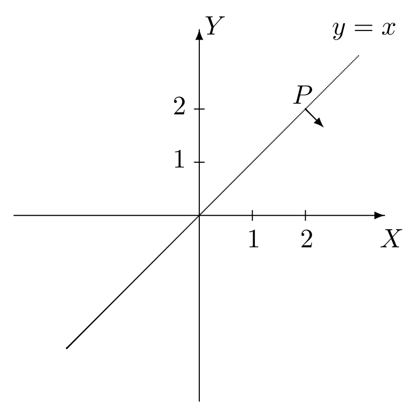
8. **L'expérience montre que, dans un champ de température, la chaleur s'écoule dans la direction et le sens dans lesquels la température décroît le plus vite. Trouver cette direction et ce sens en tout point du champ puis en un point P donné dans les cas suivants :**
   a) $T(x,y) = x^2 - y^2$ et P a pour coordonnées $(2,1)$
   b) $T(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ et P a pour coordonnées $(2,2)$.
   Esquisser l'isotherme correspondant à la valeur 3 dans le premier cas et à $\frac{\pi}{4}$ dans le second ainsi que les vecteurs qui correspondent à la direction et au sens obtenus au point P.

   En toute généralité, le gradient de T est un vecteur qui pointe dans la direction et le sens dans lesquels T croît le plus vite. Puisque la chaleur s'écoule dans la direction et le sens dans lesquels la température décroît le plus vite, on considère l'opposé du vecteur gradient de T c'est-à-dire le vecteur de composantes

   $$\text{a) } (-2x, 2y) \qquad\qquad \text{b) } \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right).$$

   Au point P, on a respectivement les vecteurs de composantes $(-4,2)$ et $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$.

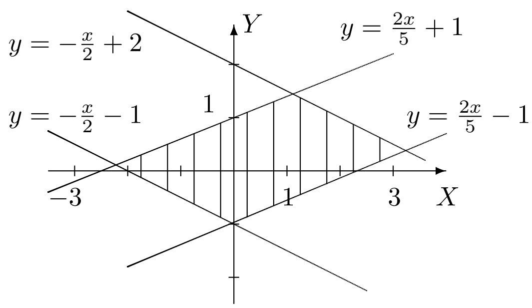




Liste 7 : fonctions de plusieurs variables (2)

I. Dérivation des fonctions composées

1. **a) On donne f, continûment dérivable sur $]-2,4[\times]-5,5[$. On demande le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par $F(x,y)=f(x+2y,2x-5y)$, sa représentation graphique ainsi que l'expression de ses dérivées partielles en fonction de celles de f.**



Le domaine de dérivabilité de F est l'ensemble $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -2<x+2y<4,\ -5<2x-5y<5\}$. Sa représentation graphique est la partie du plan hachurée, les points des droites étant exclus de l'ensemble.

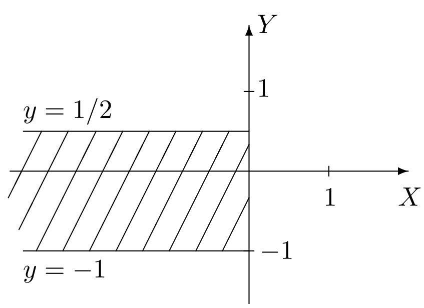
Les dérivées partielles sont

$$(D_xF)(x,y)=(D_uf)(x+2y,2x-5y).1+(D_vf)(x+2y,2x-5y).2$$

$$(D_yF)(x,y)=(D_uf)(x+2y,2x-5y).2+(D_vf)(x+2y,2x-5y).(-5)$$

où u et v sont respectivement les première et deuxième variables de f.

b) Même question pour g, continûment dérivable sur $]0,1[\times]\ln(\frac{\pi}{3}),+\infty[$ et $G(x,y)=g(\exp(x),\ \ln(\arccos(y)))$.



Le domaine de dérivabilité de G est l'ensemble $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x<0,\ y\in]-1,1/2[\}$. Sa représentation graphique est la partie du plan hachurée, les points des bords étant exclus de l'ensemble.

Les dérivées partielles sont

$$(D_xG)(x,y)=(D_ug)(\exp(x),\ln(\arccos(y))).\exp(x)$$

$$(D_yG)(x,y)=(D_vg)(\exp(x),\ln(\arccos(y))).\left(\frac{-1}{\arccos(y)\sqrt{1-y^2}}\right)$$

où u et v sont respectivement les première et deuxième variables de g.

2. **On donne la fonction g continûment dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}[\times]0,+\infty[\times]0,\frac{10}{9}[$.**
   a) Déterminer le domaine de dérivabilité de $f: t\mapsto f(t)=g(\arcsin(2t),\frac{1}{\sqrt{t+1}},t^2+1)$.
   b) Calculer la dérivée de f en fonction des dérivées partielles de g.
   c) Si elle est définie, que vaut cette dérivée en 0 ? en $1/3$?
   d) Mêmes questions si g est continûment dérivable sur $]-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}[\times]\sqrt{2},+\infty[\times]0,3[$.
   a) Le domaine de dérivabilité de f est $A=]-\frac{1}{3},\frac{1}{4}[$.
   b) La dérivée de f est donnée par

$$Df(t) = (D_u g)\left(\arcsin(2t), \tfrac{1}{\sqrt{t+1}}, t^2+1\right).\tfrac{2}{\sqrt{1-4t^2}}$$
$$+ (D_v g)\left(\arcsin(2t), \tfrac{1}{\sqrt{t+1}}, t^2+1\right).\tfrac{-1}{2\sqrt{(t+1)^3}} + (D_w g)\left(\arcsin(2t), \tfrac{1}{\sqrt{t+1}}, t^2+1\right).2t$$

où u, v et w sont respectivement les première, deuxième et troisième variables de g.
c) La dérivée de f en 0 est donnée par $(Df)(0) = (D_u g)(0,1,1).2 + (D_v g)(0,1,1).(\frac{-1}{2})$; elle n'est pas dérivable en 1/3.
d) Le domaine de dérivabilité de f est vide : f n'est jamais dérivable.

3. **Soit** $F(t) = f(x(t), y(t))$ **avec** $x(3) = 2,\ y(3) = 7,\ (Dx)(3) = 5,\ (Dy)(3) = -4,\ (D_x f)(2,7) = 6$ **et** $(D_y f)(2,7) = -8$**. En supposant satisfaites les hypothèses du théorème de dérivation des fonctions composées en** 3**, que vaut (DF)(3) ?**

   On a $(DF)(3) = (D_x f)(2,7).(D_t x)(3) + (D_y f)(2,7).(D_t y)(3) = 62$.

4. **Soit** $F(s,t) = f(u(s,t), v(s,t))$**. En supposant satisfaites les hypothèses du théorème de dérivation des fonctions composées en** $(1,0)$ **si**

$$u(1,0) = 2 \quad (D_s u)(1,0) = -2 \quad (D_t u)(1,0) = 6$$
$$v(1,0) = 3 \quad (D_s v)(1,0) = 5 \quad (D_t v)(1,0) = 4$$

   et $(D_u f)(2,3) = -1$ **et** $(D_v f)(2,3) = 10$**, calculer** $(D_s F)(1,0)$ **et** $(D_t F)(1,0)$**.**

   On a $(D_s F)(1,0) = (D_u f)(2,3).(D_s u)(1,0) + (D_v f)(2,3).(D_s v)(1,0) = 52$ et
   $(D_t F)(1,0) = (D_u f)(2,3).(D_t u)(1,0) + (D_v f)(2,3).(D_t v)(1,0) = 34$.

II. Extrema de fonctions de 2 variables

1. **Rechercher les extrema ainsi que les points-selles des fonctions**
   (a) $f : (x,y) \mapsto f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$
   (b) $f : (x,y) \mapsto f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x - 10y + 30$
   (c) $f : (x,y) \mapsto f(x,y) = y^2 - 3x^2 + 5$
   (d) $f : (x,y) \mapsto f(x,y) = x^4 + y^4 - 8xy + 4$
   (e) $f : (x,y) \mapsto f(x,y) = 3xy^2 + x^3 - 3y^2 - 3x^2 + 2$
   (f) $f : (x,y) \mapsto f(x,y) = \cos(x) + \cos(y) + \cos(x+y),\ x, y \in [0, 2\pi[$**.**

   Les extrema et les points-selles sont les suivants

   (a) $(0,0)$ est un point-selle et $f(0,0) = 1$.
   $(1,1)$ et $(-1,-1)$ sont des minima locaux et $f(1,1) = f(-1,-1) = -1$.
   De plus, comme $E(x,y) = f(x,y) - f(1,1) = f(x,y) - f(-1,-1)$, on a
   $E(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2 = (x^2-1)^2 + (y^2-1)^2 + (\sqrt{2}x - \sqrt{2}y)^2 \geq\ 0\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$; ces minima sont donc globaux.

   (b) $(2,5)$ est un minimum local et $f(2,5) = 1$.
   De plus, on a $f(x,y) - f(2,5) = x^2 + y^2 - 4x - 10y + 29 = (x-2)^2 + (y-5)^2 \geq 0\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$; ce minimum est donc global.

   (c) $(0,0)$ est un point-selle et $f(0,0) = 5$.

   (d) $(0,0)$ est un point-selle et $f(0,0) = 4$.
   $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ sont des minima locaux et $f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})) = -4$.
   De plus, comme $E(x,y) = f(x,y) - f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = f(x,y) - f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ on a

$E(x,y) = x^4 + y^4 - 8xy + 8 = (x^2-2)^2 + (y^2-2)^2 + (2x-2y)^2 \geq 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$; ces minima sont donc globaux.

(e) $(1,1)$ et $(1,-1)$ sont des points-selles et $f(1,1) = f(1,-1) = 0$.
$(0,0)$ est un maximum local et $f(0,0) = 2$; ce n'est pas un maximum global car $f(x,y) - f(0,0) = x^2(x-3) + 3y^2(x-1)$ n'est pas négatif ou nul $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ car si $x > 3$ (par exemple) et $y \in \mathbb{R}$ cette expression est strictement positive.
Autre justification possible : on a $f(x,0) = x^3 - 3x^2 + 2$ et $\lim_{x\to+\infty}(x^3 - 3x^2 + 2) = +\infty$.
$(2,0)$ est un minimum local et $f(2,0) = -2$; ce n'est pas un minimum global car $f(x,y) - f(2,0) = x^2(x-3) + 3y^2(x-1) + 4$ n'est pas positif ou nul $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ car si $x = -3$ (par exemple) et $y \in \mathbb{R}$ cette expression est strictement négative.
Autre justification possible : on a $f(x,0) = x^3 - 3x^2 + 2$ et $\lim_{x\to-\infty}(x^3 - 3x^2 + 2) = -\infty$.

(f) $(\pi, 0)$ et $(0, \pi)$ sont des points-selles et $f(\pi, 0) = f(0, \pi) = -1$.
$(0,0)$ est un maximum local et $f(0,0) = 3$; c'est même un maximum global puisque $\cos(\alpha) \in [-1, 1] \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
(π, π) est un point selle et $f(\pi, \pi) = -1$
$(2\pi/3, 2\pi/3)$ et $(4\pi/3, 4\pi/3)$ sont des minima locaux et $f(2\pi/3, 2\pi/3) = f(4\pi/3, 4\pi/3) = -3/2$.
De plus, comme
$E(x,y) = f(x,y) - f(2\pi/3, 2\pi/3) = f(x,y) - f(4\pi/3, 4\pi/3) = \cos(x) + \cos(y) + \cos(x+y) + 3/2$,
on a

$$\begin{aligned} E(x,y) &= 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) + \cos(x+y) + \frac{3}{2} \\ &= 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) + 2\cos^2\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{1}{2} \\ &= 2Z^2 + 2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) Z + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

avec $Z = \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$.
L'expression E apparait donc comme un trinôme du second degré en Z avec pour discriminant

$$\Delta = 4\cos^2\left(\frac{x-y}{2}\right) - 4 = -4\sin^2\left(\frac{x-y}{2}\right) \leq 0.$$

Si $\Delta = 0$, le trinôme $E(x,y)$ est un carré parfait ; il est donc positif ou nul.
Si $\Delta < 0$, comme le coefficient de Z^2 est positif, le trinôme $E(x,y)$ est strictement positif.
Dès lors, les minima locaux $(2\pi/3, 2\pi/3)$ et $(4\pi/3, 4\pi/3)$ sont en fait des minima globaux.

2. **Déterminer la distance [3] (c'est-à-dire la plus courte distance) entre le point de coordonnées $(1, 0, -2)$ et le plan d'équation cartésienne $x + 2y + z = 4$.**
Le point de coordonnée $(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}, -\frac{7}{6})$ correspond à un minimum local (et même global car en géométrie, on prouve que la distance d'un point à un plan est unique) de la distance, qui vaut en ce point $\frac{5\sqrt{6}}{6}$. La distance du point donné au plan donné vaut donc $\frac{5\sqrt{6}}{6}$.

III. Permutation de l'ordre d'intégration

1. **Supposons que la fonction f est intégrable sur l'ensemble considéré. Permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration dans les cas suivants**

$$a) \int_{-1}^{1} \left(\int_{y-2}^{2-y} f(x,y)\, dx \right) dy \qquad\qquad b) \int_{0}^{3} \left(\int_{y}^{\sqrt{18-y^2}} f(x,y)\, dx \right) dy.$$

3. Suggestion : la distance entre deux points de coordonnées (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) est donnée par

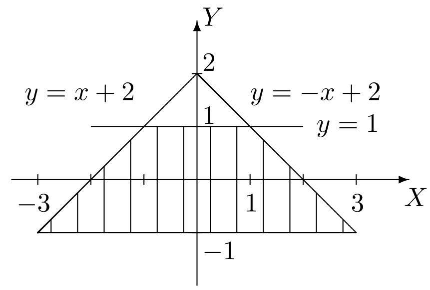
$$d = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2}$$

et, comme $d \geq 0$, minimiser d équivaut à minimiser d^2.

a) Si on permute l'ordre d'intégration, l'intégrale s'écrit

$$\int_{-3}^{-1}\left(\int_{-1}^{x+2} f(x,y)\ dy\right)dx+\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(x,y)\ dy\right)dx+\int_{1}^{3}\left(\int_{-1}^{-x+2} f(x,y)\ dy\right)dx$$

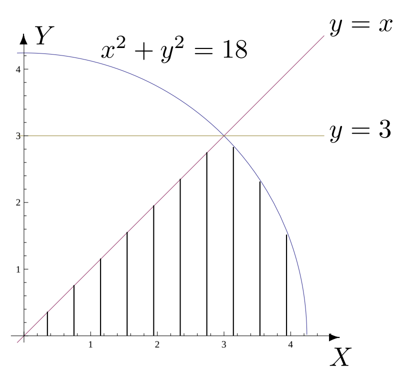
et l'ensemble d'intégration est la partie hachurée du plan ci-dessous.



b) Si on permute l'ordre d'intégration, l'intégrale s'écrit

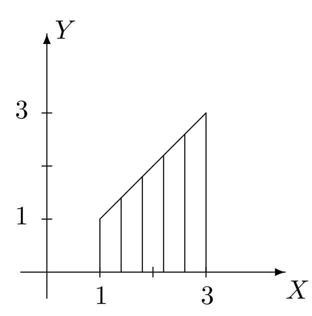
$$\int_{0}^{3}\left(\int_{0}^{x} f(x,y)\ dy\right)dx+\int_{3}^{3\sqrt{2}}\left(\int_{0}^{\sqrt{18-x^2}} f(x,y)\ dy\right)dx$$

et l'ensemble d'intégration est la partie hachurée du plan ci-dessous.



2. **On considère une fonction f intégrable sur l'ensemble hachuré fermé borné A ci-dessous. Ecrire, dans un ordre et dans l'autre, l'intégrale**

$$\int\int_A f(x,y)dx\,dy.$$

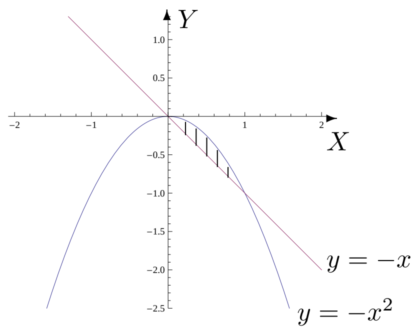


L'intégrale sur cet ensemble s'écrit

$$\int_{1}^{3}\left(\int_{0}^{x} f(x,y)\ dy\right)dx=\int_{0}^{1}\left(\int_{1}^{3} f(x,y)\ dx\right)dy+\int_{1}^{3}\left(\int_{y}^{3} f(x,y)\ dx\right)dy.$$

IV. Intégration sur des ensembles fermés bornés

1. **Dans le plan, on considère l'ensemble borné fermé A délimité par le graphique de la droite d'équation cartésienne $x + y = 0$ et celui de la fonction $x \mapsto -x^2$.**
   a) Représenter A dans un repère orthonormé et en donner une expression analytique.
   b) Calculer, si elle existe, l'intégrale de f sur A si $f : (x, y) \mapsto f(x, y) = x\cos(y)$.



L'expression analytique de A est
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1],\ y \in [-x, -x^2]\}$
ou encore
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 0],\ x \in\ [-y, \sqrt{-y}]\}$.
La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\sin(1) - \frac{1}{2}(\cos(1) + 1)$.

2. **Si elle existe, calculer l'intégrale de**
   a) $f(x, y) = 4 + x^2$ sur $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2, 2],\ y \in [1 + x^2, 9 - x^2]\}$
   b) $f(x, y) = \cos(y^2)$ sur $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 0],\ y \in [-x, 1]\}$
   c) $f(x, y) = y^2 \cos(xy)$ sur $A = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \times [-1, 1]\}$.

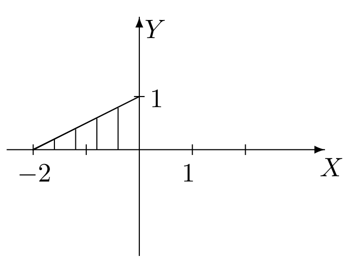
   a) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{512}{5}$.

   b) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{1}{2}\sin(1)$.

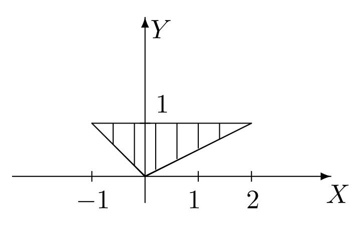
   c) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{2\pi - 8}{\pi^2}$.

3. **Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale sur l'ensemble A borné fermé hachuré ci-dessous dans les cas suivants**

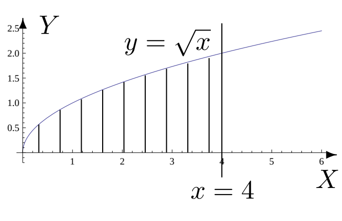
a) $\int\int_A e^{x-y}\, dx\, dy$



b) $\int\int_A xy\, dx\, dy$



c) $\displaystyle\int\int_A \frac{y}{\sqrt{1 + x^2}}\, dx\, dy.$



a) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\left(\dfrac{1}{e} - 1\right)^2$.

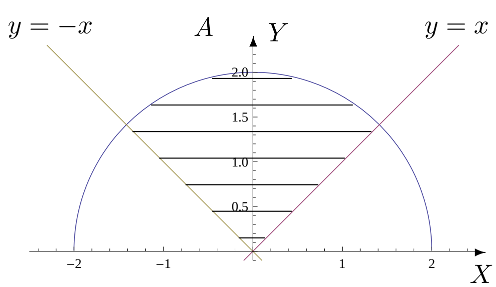
b) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{3}{8}$.

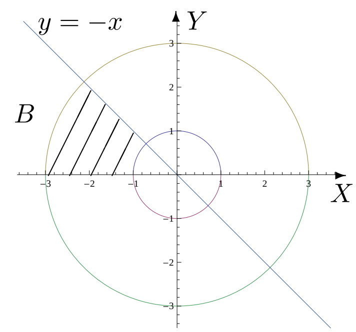
c) La fonction f est intégrable sur A et son intégrale vaut $\dfrac{1}{2}(\sqrt{17} - 1)$.

Liste 8 : fonctions de plusieurs variables (3) Découplage d'un système d'équations différentielles

I. Intégration par changement de variables polaires

1. **Si elle existe, calculer**
   a) $\displaystyle\int\int_A \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ où A est l'ensemble hachuré ci-dessous.
   b) $\displaystyle\int\int_B xy\,dx\,dy$ où B est l'ensemble hachuré ci-dessous.
   c) $\displaystyle\int\int_C (2x+y)\,dx\,dy$ où $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le \inf\{-x,\sqrt{1-x^2}\}\}$.





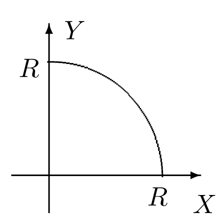
Les 3 fonctions sont intégrables et les intégrales valent respectivement $\dfrac{4\pi}{3}$, -5 et $\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$.

2. **Soit A une partie du plan (bornée et fermée). Le centre de masse de A (considéré homogène) est défini comme le point de coordonnées (x_A, y_A) où**

$$x_A = s^{-1}\int\int_A x\;dx\;dy,\quad y_A = s^{-1}\int\int_A y\;dx\;dy$$

et où s est l'aire de la surface A.
Déterminer la position du centre de masse d'une plaque homogène dont la forme est un tiers de cercle de rayon R (R réel strictement positif).

La position du centre de masse est donnée par le point de coordonnées $\left(\dfrac{R\sqrt{3}}{2\pi},\dfrac{3R}{2\pi}\right)$ dans un repère orthonormé correspondant au graphique ci-dessous.



II. Découplage d'un système d'équations différentielles

1. **Le mouvement d'une particule se déplaçant dans le plan est régi par les équations différentielles suivantes :**

$$\left\{\begin{array}{lcl} Dx(t) & = & -4x(t)-3y(t)+5t \\ Dy(t) & = & -2x(t)-5y(t)+5e^t. \end{array}\right.$$

Déterminer les composantes $(x(t), y(t))$ du vecteur position de cette particule à tout instant t.

Sous forme matricielle, le système donné s'écrit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} Dx(t) \\ Dy(t) \end{pmatrix}}_{:=DP(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}}_{:=A} \underbrace{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}}_{:=P(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 5t \\ 5\,e^t \end{pmatrix}}_{:=B(t)}. \qquad (*)$$

Tentons de diagonaliser la matrice A. On a

$$\det(A-\lambda\,\mathbb{1}) = \lambda^2+9\lambda+14 = (\lambda+2)(\lambda+7)$$

et donc les valeurs propres de A sont -2 (simple) et -7 (simple), ce qui entraîne que A est diagonalisable. Les vecteurs

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres de A associés respectivement à -2 et -7. Ainsi, en posant

$$S = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ il vient que } S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Dès lors, en posant

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = S^{-1}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

il vient que

$$\begin{pmatrix} DX(t) \\ DY(t) \end{pmatrix} = S^{-1}\begin{pmatrix} Dx(t) \\ Dy(t) \end{pmatrix},$$

et, en multipliant à gauche par S^{-1} les deux membres de l'égalité $(*)$ ci-dessus, on obtient que

$$\begin{array}{lc} & S^{-1}\begin{pmatrix} Dx(t) \\ Dy(t) \end{pmatrix} = S^{-1}A\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + S^{-1}\begin{pmatrix} 5t \\ 5\,e^t \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} DX(t) \\ DY(t) \end{pmatrix} = S^{-1}AS\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} + S^{-1}\begin{pmatrix} 5t \\ 5\,e^t \end{pmatrix}. \end{array} \qquad (**)$$

Or, $\det(S) = -5$ et l'inverse de S est donné par

$$S^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, l'équation $(**)$ équivaut à

$$\begin{pmatrix} DX(t) \\ DY(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5t \\ 5\,e^t \end{pmatrix}.$$

ce qui équivaut encore au système

$$\left\{\begin{array}{lcl} DX(t) & = & -2X(t)-t+e^t \\ DY(t) & = & -7Y(t)+2t+3\,e^t. \end{array}\right.$$

Les équations différentielles sont alors *découplées* et peuvent être résolues séparément. Les solutions de ces deux dernières EDLCC sont les fonctions

$$X(t) = C_1 e^{-2t} + \frac{1}{3}e^t - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4},\ t \in \mathbb{R}$$

et

$$Y(t) = C_2 e^{-7t} + \frac{3}{8}e^t + \frac{2}{7}t - \frac{2}{49},\ t \in \mathbb{R}$$

où $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$. Enfin, vu ce qui précède, le vecteur position de la particule à l'instant t est donné par

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} Y(t)$$

ou encore

$$\begin{cases} x(t) = -3C_1\, e^{-2t} + C_2\, e^{-7t} - \dfrac{5}{8}\, e^t + \dfrac{25}{14}t - \dfrac{155}{196},\ t \in \mathbb{R} \\ y(t) = 2C_1\, e^{-2t} + C_2\, e^{-7t} + \dfrac{25}{24}\, e^t - \dfrac{5}{7}t + \dfrac{45}{98},\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où $C_1,\ C_2 \in \mathbb{C}$.

2. **Le mouvement d'une particule se déplaçant dans l'espace est régi par les équations différentielles suivantes :**

$$\begin{cases} Dx(t) &=& x(t) + 2y(t) - z(t) \\ Dy(t) &=& 2x(t) + 4y(t) - 2z(t) \\ Dz(t) &=& -x(t) - 2y(t) + z(t). \end{cases}$$

Déterminer les composantes $(x(t), y(t), z(t))$ **du vecteur position de cette particule à tout instant** t**.**

Sous forme matricielle, le système donné s'écrit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} Dx(t) \\ Dy(t) \\ Dz(t) \end{pmatrix}}_{:=DP(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{:=A} \underbrace{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}}_{=P(t)}. \qquad (*)$$

Les valeurs propres de la matrice A sont 0 (valeur propre double) et 6 (valeur propre simple). Les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres de A, linéairement indépendants, associés à 0, donc la matrice A est diagonalisable puisqu'elle possède au moins 3 vecteurs propres linéairement indépendants. De plus, le vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

est un vecteur propre associé à la valeur propre 6.
Ainsi, en posant

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ il vient que } S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Dès lors, en posant

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

et en multipliant à gauche par S^{-1} les deux membres de l'égalité $(*)$, on obtient le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} DX(t) & = & 0 \\ DY(t) & = & 0 \\ DZ(t) & = & 6Z(t) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} X(t) & = & C_1 \\ Y(t) & = & C_2 \\ Z(t) & = & C_3\, e^{6t} \end{array}\right. ,$$

où $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{C}$. Dès lors, vu ce qui précède, le vecteur position de la particule à l'instant t est donné par

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} &= S \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 e^{6t} \end{pmatrix} \\ &= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{6t}, \quad \text{où } C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

ou encore

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = C_1 + 2C_2 + C_3\, e^{6t} \\ y(t) = -C_2 + 2C_3\, e^{6t} \\ z(t) = C_1 - C_3\, e^{6t}. \end{array}\right.$$

3. **Résoudre les systèmes d'équations différentielles suivants :**

(a) $\left\{\begin{array}{lcl} Dx(t) & = & x(t) + 3y(t) \\ Dy(t) & = & 2x(t) + 2y(t). \end{array}\right.$

(b) $\left\{\begin{array}{lcl} Dx(t) & = & x(t) - y(t) \\ Dy(t) & = & x(t) + y(t). \end{array}\right.$

(c) $\left\{\begin{array}{lcl} D^2x(t) & = & x(t) - y(t) \\ D^2y(t) & = & -4x(t) + y(t). \end{array}\right.$

(d) $\left\{\begin{array}{lcl} Dx(t) & = & x(t) + 6y(t) \\ Dy(t) & = & x(t) + 2y(t) \\ Dz(t) & = & x(t) + y(t) + 3z(t). \end{array}\right.$

Si $C_1,\ C_2,\ C_3$ et C_4 sont des constantes complexes arbitraires, on a

(a) $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & 3C_1\ e^{-t} + C_2\ e^{4t} \\ y(t) & = & -2C_1\ e^{-t} + C_2\ e^{4t}. \end{array}\right.$

(b) $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & e^t(C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t)) \\ y(t) & = & e^t(-C_2 \cos(t) + C_1 \sin(t)). \end{array}\right.$

(c) $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t) + C_3\ e^{-\sqrt{3}\ t} + C_4\ e^{\sqrt{3}\ t} \\ y(t) & = & 2C_1 \cos(t) + 2C_2 \sin(t) - 2C_3\ e^{-\sqrt{3}\ t} - 2C_4\ e^{\sqrt{3}\ t}. \end{array}\right.$

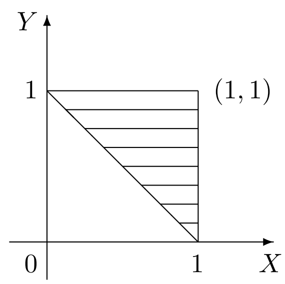
(d) $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & -6C_1\ e^{-t} + 2C_3\ e^{4t} \\ y(t) & = & 2C_1\ e^{-t} + C_3\ e^{4t} \\ z(t) & = & C_1\ e^{-t} + C_2\ e^{3t} + 3C_3\ e^{4t}. \end{array}\right.$

III. Divers

1. **Si une charge électrique est répartie sur une région R et si la densité de charges (en unités par unités carrées) est donnée par $\rho(x,y)$ en un point(x,y) de R, alors la charge totale Q présente sur cette région est donnée par**

$$Q = \iint_R \rho(x,y)\,dxdy.$$

Une charge électrique est distribuée sur le domaine triangulaire D de la figure ci-dessous de manière telle que la densité de charge en (x,y) est donnée par $\rho(x,y) = 2xy$, mesurée en coulombs par mètre carrés (C/m^2). Calculer la charge totale présente sur D.



La charge totale présente sur le domaine triangulaire donné est de $\frac{5}{12}C$.

2. **En physique, le *moment d'inertie* d'une masse ponctuelle m par rapport à un axe est défini par le produit mr^2, où r est la distance entre la masse ponctuelle m et l'axe. Cette notion se généralise au cas d'une plaque de métal, qui occupe une région R du plan et dont la densité en (x,y) est donnée par $\rho(x,y)$, de la manière suivante.**
Le moment d'inertie d'une telle plaque par rapport à l'axe des abscisses (resp. des ordonnées) vaut

$$I_X = \iint_R x^2\rho(x,y)\,dxdy \qquad \left(\text{resp. } I_Y = \iint_R y^2\rho(x,y)\,dxdy\right).$$

Il peut également être intéressant de considérer le moment d'inertie par rapport à l'origine O, celui-ci étant donné par

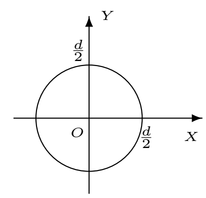
$$I_O = \iint_R (x^2+y^2)\rho(x,y)\,dxdy.$$

On remarque évidemment que $I_O = I_X + I_Y$.

Soit un disque homogène D de densité $\rho(x,y) = \rho$ et de diamètre d. Déterminer

a) **le moment d'inertie de ce disque par rapport à son centre ;**
b) **le moment d'inertie de ce disque par rapport à une droite quelconque d' passant par son centre.**

a) Considérons le repère orthonormé dont l'origine O est le centre du disque donné, et dont les axes coïncident avec deux droites perpendiculaires passant par O. On obtient dès lors la configuration suivante :



Dans ces conditions, le disque D est décrit par

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq \left(\frac{d}{2} \right)^2 \right\}$$

ce qui correspond en coordonnées polaires à l'ensemble

$$D' = \left\{ (r, \theta) \mid r \in \left] 0, \frac{d}{2} \right], \ \theta \in [0, 2\pi] \right\},$$

auquel on ajoute le centre du disque.
Ainsi, le moment d'inertie du disque D par rapport à son centre correspond au moment d'inertie par rapport à l'origine du repère choisi et est donné par

$$I_O = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) \, dxdy = \iint_{D'} r^2 \rho \, r \, drd\theta = \frac{\pi \rho d^4}{2^5}.$$

b) Vu le choix du repère, le moment d'inertie du disque D par rapport à une droite passant par son centre correspond au moment d'inertie par rapport à l'axe X ou encore par rapport à l'axe Y. On en conclut donc que tous ces moments d'inertie du disque sont égaux, c'est-à-dire $I_X = I_Y = I_{d'}$ quelle que soit la droite d' passant par O. Par conséquent, comme

$$I_O = I_X + I_Y = 2 I_{d'},$$

il s'ensuit que

$$I_{d'} = \frac{I_O}{2} = \frac{\pi \rho d^4}{2^6}.$$

Table des matières