MATH0009 *Biologie et Géographie*

Année académique 2021-2022

Exercices de mathématiques
Révisions en vue de l'interrogation du 22 avril
et de l'examen de juin 2022

Version 18 mars 2022

Répétition 8 : révisions

A préparer AVANT de venir à la répétition

1. On se place dans un repère orthonormé. Représenter le graphique des coniques suivantes, données par leur équation cartésienne. Comment s'appellent ces coniques ? Quelles sont les coordonnées de leur(s) foyer(s) ? Quelle est leur excentricité ? Quelle est l'équation des éventuelles asymptotes ?
(a) $y^2 = x + 1$ (b) $x^2 - 1 = 4y^2$ (c)$x^2 + 3y^2 = 12$

2. Soient les matrices A et B données par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i^3 \\ 0 & i & 0 \\ \frac{1}{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B^* = \begin{pmatrix} 2i & i & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si possible, effectuer les opérations suivantes et simplifier la réponse au maximum :

1) $A + \widetilde{B}$ 2) $C = AB$ 3) C^{-1}

3. La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Pourquoi ?
Si oui, en déterminer une forme diagonale Δ ainsi qu'une matrice inversible S qui y conduit.

4. Pour inciter les jeunes à faire du sport, une association oblige ses affiliés à pratiquer, chaque semaine, un sport sur les trois qu'elle propose (jogging, natation, basket). D'une semaine à l'autre, les étudiants peuvent changer de choix.
- Ayant choisi le jogging, un étudiant a une chance sur deux d'aller à la piscine et une chance sur deux de pratiquer le basket la semaine suivante.
- S'il a nagé une semaine, la semaine suivante, il a une chance sur trois de poursuivre la même activité, une chance sur trois de faire du jogging et une chance sur trois de pratiquer le basket.
- Enfin, s'il a joué au basket, il a une chance sur quatre de nager et trois chances sur quatre de faire du jogging.
(i) Déterminer la matrice de transition.
(ii) Sachant que cette matrice est régulière, calculer la probabilité qu'à long terme un étudiant fasse du jogging.

5. Déterminer les parties réelle et imaginaire, le conjugué et le module du complexe $z = i^7/(i-1)$. Le représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé (« X = axe réel » et « Y = axe imaginaire »).

6. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$: (a) $x^2 + 3 = 2ix$ (b) $8 - x^3 = 0$

7. Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes (f est la fonction inconnue)

$$a)\ D^2 f(x) + f(x) = e^{ix} \qquad b)\ 9D^2 f(x) + 6Df(x) + f(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right)$$

8. (a) Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre $n = 0$, 1, 2 et 3 en $x_0 = 0$ de la fonction

$$f : x \mapsto f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

(b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.
(c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0 en tenant compte du point précédent.

9. Calculer l'aire de la partie du plan dont une description analytique est la suivante

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -|2x| \geq y \text{ et } y^2 \leq 5+x\}.$$

Donner aussi une représentation graphique de l'ensemble.

10. Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier la réponse au maximum.

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{\ln(-3x)}{x}dx$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^{3x}dx$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{2-x}dx$ $\qquad$ (d) $\displaystyle\int_{-4}^{4} \sqrt{x^2}dx$

(e) $\displaystyle\int_{4}^{5} \frac{2}{x(x^2-6x+9)}dx$

11. On donne la fonction f par

$$f : (x,y) \mapsto f(x,y) = \arcsin(y^2+x+1)$$

(a) Déterminer le domaine d'infinie dérivabilité de cette fonction et le représenter dans un repère orthonormé.

(b) Calculer la dérivée de f par rapport à sa deuxième variable.

(c) Déterminer le domaine de dérivabilité ainsi que la forme explicite de

$$F : t \mapsto F(t) = f(5t^2-1, 2t)$$

et de sa dérivée en tout point de ce domaine.

(d) Si F est dérivable en $1/6$, que vaut sa dérivée en ce point ? Simplifier votre réponse au maximum.

12. On donne la fonction f continûment dérivable sur $]1,2[\times]0,1[$ et à valeurs strictement positives.

(a) Déterminer le domaine de dérivabilité de $g : x \mapsto \ln(f(\sqrt{x}, \ln(3-x)))$.

(b) Calculer la dérivée de g en fonction de f et de ses dérivées partielles.

(c) Si g est dérivable en $5/2$, que vaut sa dérivée en ce point ?

13. a) Esquisser la représentation graphique de la surface quadrique d'équation

$$4x^2+y^2-z+1=0.$$

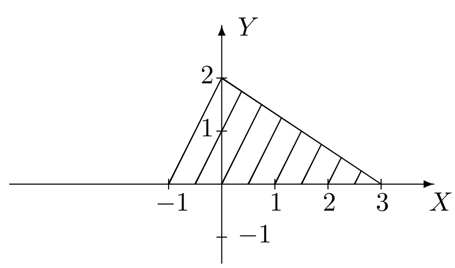
b) Quel est le nom de cette quadrique ?

14. Rechercher les extrema ainsi que les points-selles éventuels de la fonction

$$f : (x,y) \mapsto f(x,y) = 8x^3+y^3-3xy+1.$$

15. On donne l'ensemble fermé hachuré A suivant. Déterminer

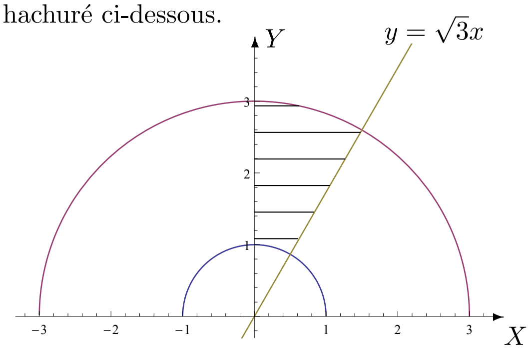
$$\iint_A y\, e^{y-2x} dxdy.$$



16. Calculer, si possible l'intégrale suivante

$$\iint_A \frac{x}{y} dxdy,$$

où A est l'ensemble fermé hachuré ci-dessous.



17. La fonction f étant supposée intégrable, permuter l'ordre d'intégration après avoir représenté l'ensemble d'intégration si

$$I = \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{1}{x+1}} f(x,y)\ dy \right)\ dx.$$

18. Résoudre le système d'équations différentielles suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} Dx(t) = 2x(t) + 2y(t) \\ Dy(t) = x(t) + 3y(t) \end{array} \right.$$