Année académique 2022-2023

MATHEMATIQUES GENERALES II, MATH0009

Deuxième bloc en biologie et en géographie

Françoise Bastin

Version 9 novembre 2022 (V1 : 020621)

Introduction

La matière de ce syllabus est une suite de celle enseignée en première année dans le cours de *Mathématiques générales MATH0509*.

Le premier chapitre rappelle des notions fondamentales déjà vues (dérivation, intégration, équations différentielles, approximations polynomiales) et donne quelques compléments (coniques, nombres complexes).

Le deuxième chapitre est consacré à une étude du calcul matriciel de base. Il présente aussi le cas particulier des matrices de Leslie et stochastiques, abondamment utilisées en sciences.

Le troisième chapitre est consacré à une étude des fonctions de plusieurs variables ; il y est notamment question de représentation, dérivation, extrema et d'un peu de calcul intégral.

Quant au quatrième chapitre, il donne des exemples d'application des divers outils présentés dans les chapitres précédents.

Enfin, il ne faut pas oublier le petit formulaire qui, en plus de rappels standards de dérivées, formules trigonométriques etc, rappelle les notations standards de « l'alphabet mathématique », et leur signification.

Je remercie plus que vivement Mesdames Christine Amory et Jacqueline Crasborn qui ont travaillé avec moi sur ce manuscrit. Sans Madame Amory, les graphiques ne seraient pas ce qu'ils sont ; et Madame Crasborn est à l'origine de la préparation des listes d'exercices (syllabus séparé). Leurs relectures attentives, leurs remarques pertinentes ont été bien constructives ! Quel travail fourni pour les graphiques et les listes d'exercices ! Leur aide permanente, efficace, a été bien utile pour produire ces syllabi à temps pour la rentrée.

Table des matières

Chapitre 1

Rappels et compléments

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions importantes d'un cours de première année, indispensables à connaître et à savoir manipuler pour le présent cours. Nous donnons aussi quelques compléments de base (rappels de matières de l'enseignement secondaire).

1.1 Rappels : Les coniques

1.1.1 Préambule et adoption d'une définition

Préambule

Les coniques ... vaste sujet ! Il s'agit de courbes planes, qui furent étudiées déjà dans la Grèce antique. Leurs propriétés géométriques sont remarquables et interviennent dans de nombreuses situations et phénomènes courants.

Pour découvrir les coniques ≪ en s'amusant ≫, rien de tel que de surfer un peu sur le web. On peut ainsi facilement trouver de nombreuses représentations ou photos sur lesquelles le rôle des coniques et de leurs propriétés géométriques sont clairement mis en évidence.

Mais présentons aussi ici un résumé succinct d'un point de vue très pratique quant à leur description via des équations cartésiennes. Avec cette approche, les autres descriptions des coniques apparaissent comme des exercices d'analyse et de géométrie analytique plane (donc pouvant être abordés d'un point de vue très ≪ calculatoire ≫ par description et interprétation correctes d'une représentation graphique).

Définition via équations cartésiennes

Rappelons que dans le plan muni d'un repère, on appelle équation cartésienne d'un ensemble, la [1] relation [2] entre les coordonnées cartésiennes (x, y) caractérisant l'appartenance d'un point de coordonnées (x, y) à l'ensemble ; autrement dit, dire que $E(x, y) = 0$ est l'équation cartésienne de l'ensemble $\mathcal{L}$ signifie qu'un point de coordonnées (x, y) appartient à $\mathcal{L}$ si et seulement si $E(x, y) = 0$.

Dans notre approche, nous définissons donc une conique comme un ensemble de points du plan dont la description via équation cartésienne utilise un polynôme du second degré à coefficients et variables réelles, à savoir

$$E(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f$$

1. Signalons toutefois que, dans un même repère, cette relation n'est pas nécessairement unique ; on utilise cependant l'article défini car bien souvent, l'unicité est obtenue à une constante multiplicative non nulle près.
2. ou des relations, en toute généralité.

où les coefficients des termes du second degré ne sont pas tous nuls. En toute généralité, l'équation d'une conique est donc du type

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

avec la condition mentionnée sur les coefficients.

Un changement de repère permet toujours d'obtenir une forme beaucoup plus simple pour l'équation cartésienne [3]. Sauf dans le cas où la conique est vide, réduite à un point ou formée de droites (cas dits "dégénérés"), cette forme est de l'un des trois types ci-dessous, dans lesquels les variables x et y peuvent être éventuellement permutées

$$\boxed{(i)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (ii)\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (iii) y^2 = 2px}$$

où a et b sont des réels strictement positifs et où p est un réel non nul. On appelle ces formes d'équations des équations *canoniques* ou encore *réduites.*

1.1.2 Première description

Commençons par une petite description immédiate des coniques, données via les équations canoniques ci-dessus.

L'ellipse

L'équation cartésienne canonique

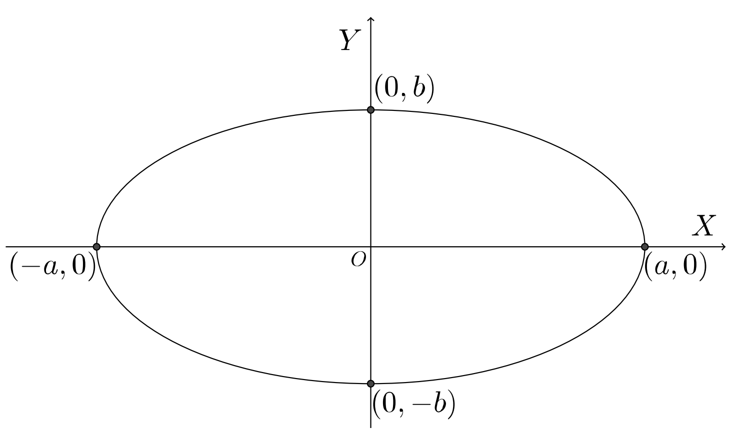
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

est celle d'une conique que l'on appelle *ellipse.* On constate directement que les points de cet ensemble constituent un ensemble borné et on trouve directement ses intersections avec les axes du repère.

D'autres approches du graphique peuvent être envisagées.

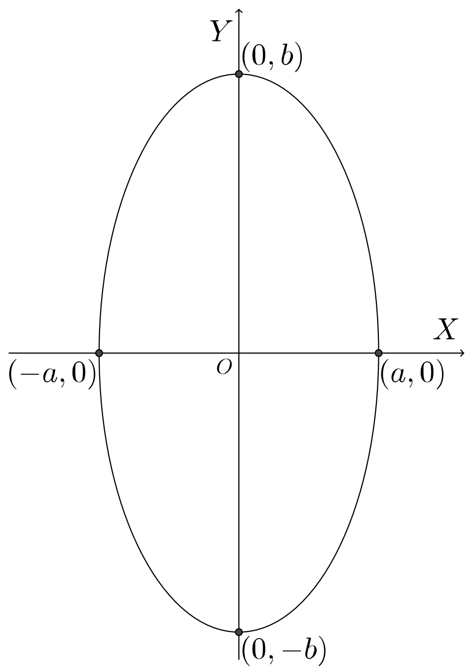
Quoi qu'il en soit, en étudiant les fonctions $x \mapsto b\sqrt{1 - x^2/a^2}$ et $x \mapsto -b\sqrt{1 - x^2/a^2}$ et les symétries (afin de ramener l'étude au premier quadrant) on peut obtenir une représentation plus précise (cela implique l'étude de la représentation graphique des fonctions).

Lorsque $a > b$, la représentation est la suivante (le repère est orthonormé).



3. Pour le montrer, on utilise des procédés tout à fait standards que nous ne présenterons pas ici, en première lecture. La littérature abonde de références sur le sujet.

Lorsque $a < b$, on obtient (le repère est orthonormé) la représentation suivante



Quand $a = b$, l'ellipse est le cercle centré à l'origine et de rayon $a = b$.

L'hyperbole

L'équation cartésienne canonique

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

est celle d'une conique que l'on appelle *hyperbole.* On constate directement que cet ensemble de points n'est pas borné et on trouve immédiatement ses intersections avec les axes du repère.

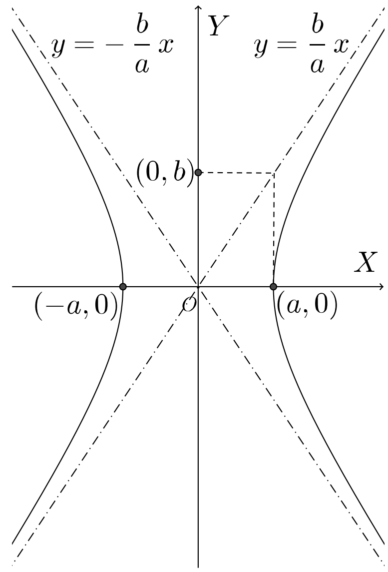
D'autres approches du graphique peuvent être envisagées.

Quoi qu'il en soit, en étudiant les fonctions $x \mapsto b\sqrt{x^2/a^2 - 1}$ et $x \mapsto -b\sqrt{x^2/a^2 - 1}$ et les symétries (pour se ramener au premier quadrant), on peut obtenir une représentation plus précise (cela implique l'étude de la représentation graphique des fonctions). On voit notamment apparaître les deux *asymptotes* d'équations cartésiennes

$$y = \frac{b}{a}x, \qquad y = -\frac{b}{a}x.$$

Une hyperbole dont les asymptotes sont orthogonales est appelée hyperbole équilatère.

Dans un repère orthonormé, on a la représentation suivante.



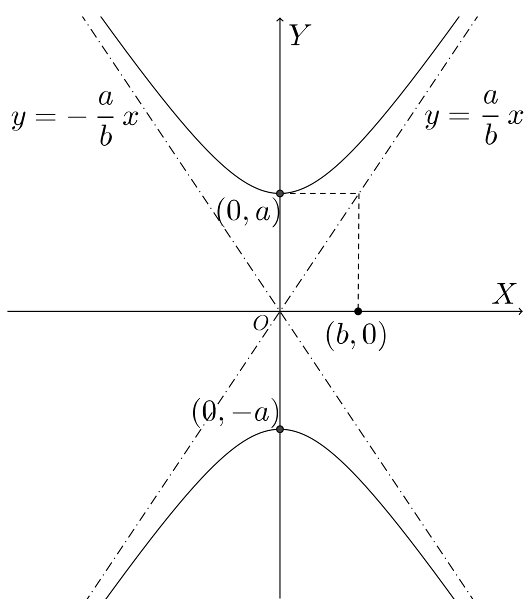
Dans le cas où le rôle des variables est permuté, c'est-à-dire si on considère l'hyperbole d'équation

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1,$$

la conique intersecte cette fois l'axe Y aux points de coordonnées $(0, a)$ et $(0, -a)$ et les asymptotes ont pour équation cartésienne

$$y = \frac{a}{b}x, \qquad y = -\frac{a}{b}x.$$

Dans un repère orthonormé, on a la représentation suivante.

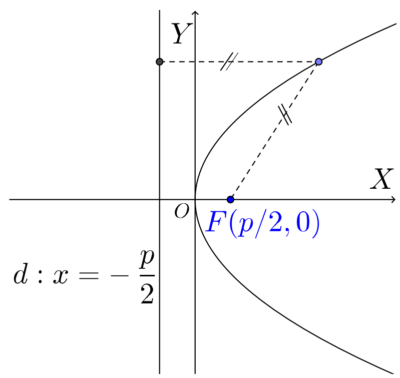


La parabole

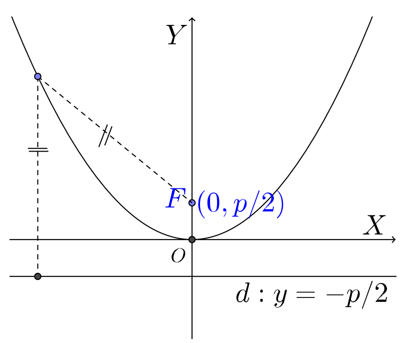
L'équation cartésienne canonique
$$y^2 = 2px$$
est celle d'une conique que l'on appelle *parabole.* On constate directement que cet ensemble de points n'est pas borné et que sa seule intersection avec les axes du repère est l'origine.

D'autres approches du graphique peuvent être envisagées. On constate notamment directement que tout point de cette parabole a des coordonnées (x, y) qui vérifient l'égalité
$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2,$$
ce qui signifie que *les points de la parabole d'équation* $y^2 = 2px$ *sont situés à égale distance du point de coordonnées* $(p/2, 0)$ *et de la droite d'équation* $x = -p/2$. Ces point et droite particuliers sont respectivement appelés *foyer et directrice* de la parabole (notés respectivement F et d ci-dessous). Nous allons revenir sur ceci dans la suite.

Lorsque p est strictement positif, on a les représentations graphiques qui suivent, dans un repère orthonormé.



Lorsque l'on permute les variables, c'est-à-dire quand on étudie la parabole d'équation
$$x^2 = 2py,$$
on obtient bien sûr une description tout à fait semblable (le repère est orthonormé).



1.1.3 Axes, foyers, directrices, excentricité

Présentons quelques autres éléments « clefs » des coniques, à partir de la définition adoptée.

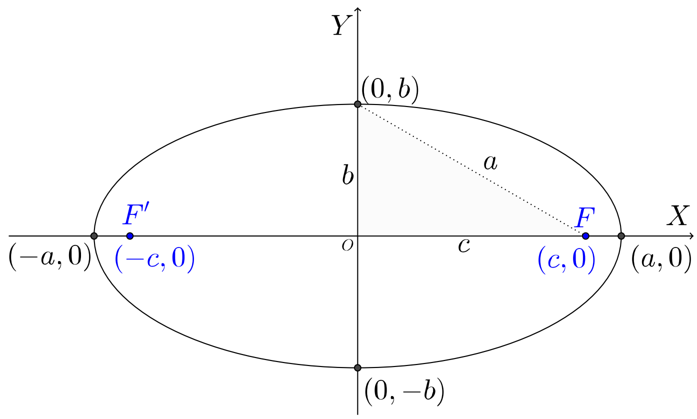
L'ellipse

Considérons l'équation $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ lorsque $a > b$. Dans ce cas, définissons

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

On a $0 \leq e < 1$ et ces grandeurs s'interprètent sur le graphique (le repère est orthonormé) comme décrit ci-dessous (se rappeler que $a^2 = b^2 + c^2$).

Les points F et F', respectivement de coordonnées $(c, 0)$ et $(-c, 0)$, sont appelés *foyers* de l'ellipse et le réel e est appelé *excentricité.* La droite passant par les foyers est appelée *grand axe.* Il s'agit ici de l'axe des abscisses. Le *centre* de l'ellipse est le point milieu du segment joignant les deux foyers.



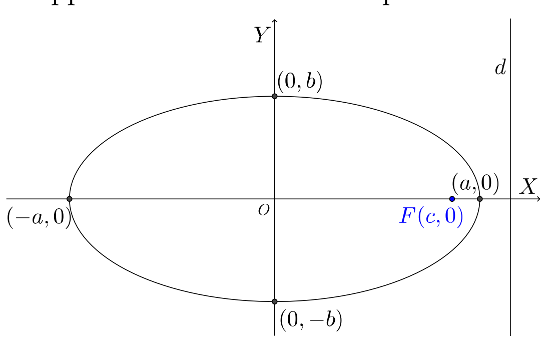
Le cas où l'excentricité est nulle correspond au cercle

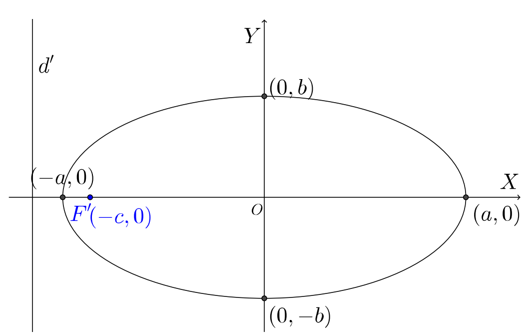
Si on considère la droite d d'équation cartésienne (quand $e \neq 0$) $d : x = a^2/c = a/e$ on démontre (exercice) que pour tout point P de l'ellipse, la distance entre P et le foyer F est égale à l'excentricité multipliée par la distance entre P et la droite d :

$$dist(P, F) \;=\; e \; dist(P, d).$$

Pour bien percevoir ce que signifie l'*excentricité*, il est utile de remarquer ceci : lorsque la valeur a est constante, l'excentricité augmente lorsque le réel c augmente (ce qui correspond à un écartement plus grand entre les foyers), c'est-à-dire lorsque le réel b diminue. Sur la représentation graphique, cela se traduit donc par le fait que l'ellipse devient « de plus en plus écrasée » lorsque l'excentricité se rapproche de 1 et « ressemble » de plus en plus à cercle lorsque l'excentricité se rapproche de 0.

Bien sûr, on peut faire un raisonnement analogue avec F' et $d' : x = -a/e$. Les droites d et d' sont appelées *directrices* de l'ellipse.





Lorsque $a < b$, on a

$$c = \sqrt{b^2 - a^2}, \quad e = \frac{c}{b} = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2}, \quad F(0, c), \quad F'(0, -c)$$

et le grand axe est cette fois l'axe des ordonnées. On définit de même des directrices et on a bien sûr les mêmes propriétés que dans le cas précédent.

L'hyperbole

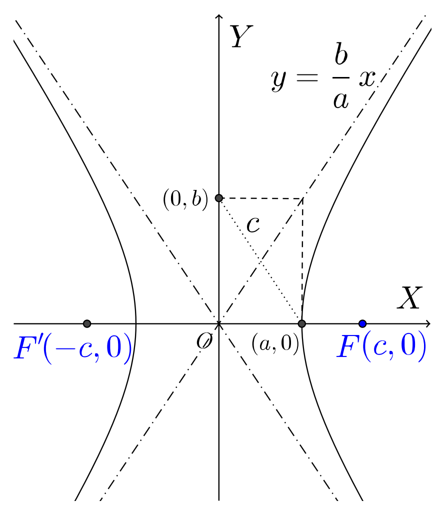
Considérons l'équation $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$. Le cas où on a permuté le rôle de x et y se traite de manière tout fait analogue.

Définissons

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

On a $e > 1$ et ces grandeurs s'interprètent sur le graphique comme décrit dans ce qui suit.

Les points F et F', respectivement de coordonnées $(c, 0)$ et $(-c, 0)$ sont appelés *foyers* de l'hyperbole et le réel e est appelé *excentricité.* La droite passant par les foyers est appelée *axe principal.* Il s'agit ici de l'axe des abscisses. Le *centre* de l'hyperbole est le point milieu du segment joignant les deux foyers.



Si l'on considère la droite d d'équation cartésienne

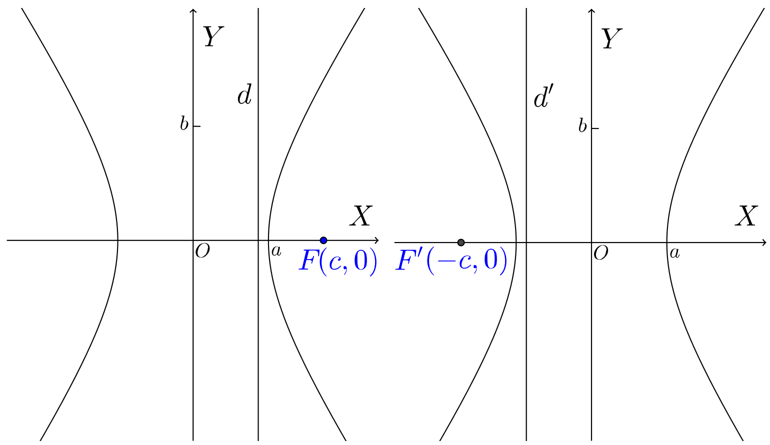
$$d \ : \ x = \frac{a^2}{c} = \frac{a}{e},$$

on démontre (exercice) que pour tout point P de l'hyperbole, la distance entre P et le foyer F est égale à l'excentricité multipliée par la distance entre P et la droite d :

$$dist(P, F) \ = \ e \ dist(P, d).$$

Pour bien percevoir ce que signifie l'*excentricité* dans ce cas aussi, il est utile de remarquer ceci : lorsque la valeur a est constante, l'excentricité augmente lorsque le réel c augmente (ce qui correspond à un écart plus grand entre les foyers), c'est-à-dire lorsque le réel b augmente. Sur la représentation graphique, cela se traduit donc par le fait que l'hyperbole devient « de plus en plus écrasée » lorsque l'excentricité se rapproche de 1 (ce qui correspond à b qui se rapproche de 0) et « s'ouvre de plus en plus » lorsque l'excentricité augmente (ce qui correspond aussi à une augmentation de b).

On peut bien sûr faire un raisonnement analogue avec F' et $d' : x = -a/e$. Les droites d et d' sont appelées *directrices* de l'hyperbole.



Dans le cas de l'équation $y^2/a^2 - x^2/b^2 = 1$, c et e sont définis de la même manière que précédemment mais les foyers sont sur l'axe des ordonnées (coordonnées $(0, -c)$ et $(0, c)$) et les directrices sont des droites parallèles à l'axe des abscisses.

La parabole

Considérons l'équation $y^2 = 2px$ avec $p > 0$.

Soient

$$c = \frac{p}{2}, \quad F(c, 0), \quad d : x = -c, \quad e = 1.$$

Le point F est appelé foyer de la parabole et la droite d directrice de la parabole. On a vu que les points P de la parabole se trouvent à égale distance du foyer et de la directrice :

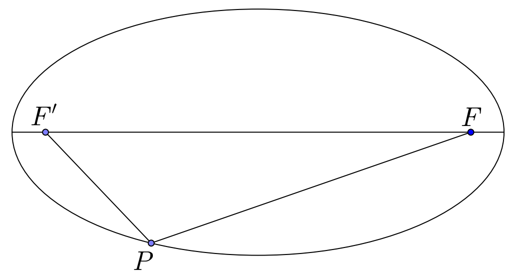
$$dist(P, F) = dist(P, d) = e\ dist(P, d).$$

L'excentricité est ici égale à 1. L'axe de la parabole est la droite passant par le foyer et orthogonale à la directrice.

1.1.4 Propriété supplémentaire de l'ellipse et de l'hyperbole

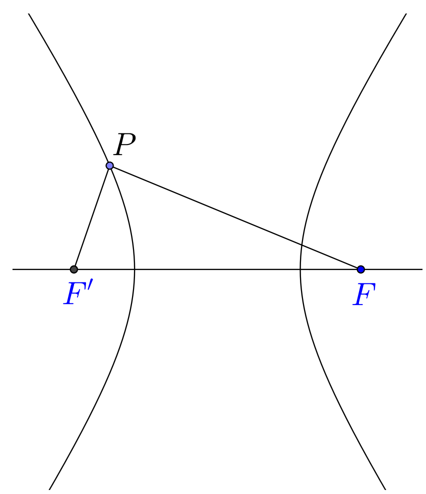
Reprenons le cas de l'ellipse traité ci-dessus. On démontre que les points de l'ellipse sont tels que la somme de leurs distances aux foyers est une constante, égale à $2a$ (on appelle aussi ce nombre la « longueur du grand axe », bien qu'il s'agisse bien sûr de la longueur d'un segment de ce grand axe) :

$$dist(F, P) + dist(F', P) = 2a \text{ pour tout point } P \text{ de l'ellipse.}$$



Passons à l'hyperbole. On démontre que les points de l'hyperbole sont tels que la valeur absolue de la différence de leurs distances aux foyers est une constante, égale à $2a$:

$$\left|dist(P,F) - dist(P,F')\right| = 2a \text{ pour tout point } P \text{ de l'hyperbole.}$$



1.1.5 Définition des coniques comme lieux géométriques

Les propriétés que nous venons de voir peuvent être prises comme point de départ pour définir les coniques. En choisissant un repère de manière adéquate, on retrouve alors les équations dont nous sommes partis.

1.1.6 Utilisations pratiques de propriétés spécifiques des coniques

Les utilisations des coniques, leurs occurrences dans les phénomènes naturels sont nombreuses.

Signalons simplement les multiples usages en optique [4] et, bien sûr, les travaux de Kepler [5]

4. Propriété de l'ellipse et de l'hyperbole dans le domaine de l'optique : un rayon lumineux émis à partir d'un foyer est réfléchi vers l'autre foyer ; propriété de la parabole, fort utilisée en pratique (radars, phares, téléscopes . . .) : un rayon lumineux émis à partir du foyer d'une parabole est réfléchi selon une droite parallèle à l'axe de la parabole (voir par exemple Ellis-Gullick p667 et alentours).

5. Johannes Kepler (ou Keppler), né le 27 décembre 1571 à Weil der Stadt dans le Bade-Wurtemberg et mort le 15 novembre 1630 à Ratisbonne en Bavière, est un astronome célèbre pour avoir étudié et confirmé l'hypothèse héliocentrique (la Terre tourne autour du Soleil) de Nicolas Copernic, et surtout pour avoir découvert que les planètes ne tournent pas en cercle parfait autour du Soleil mais en suivant des ellipses. Il a découvert les relations mathématiques (dites Lois de Kepler) qui régissent les mouvements des planètes sur leur orbite. Ces relations sont fondamentales car elles furent plus tard exploitées par Isaac Newton pour élaborer la théorie de la gravitation universelle.

décrivant les orbites des planètes autour du soleil !

1.2 Les nombres complexes

L'histoire veut qu'après les naturels on introduise les entiers pour résoudre des équations telles que $x+4=1$. Ensuite on introduit les rationnels, qui permettent de résoudre des équations du type $3x=1$. Les réels, quant à eux, donnent les solutions à des égalités du type[6] $x^2=2$. Et les complexes permettent de résoudre par exemple $x^2=-4$, comme on va le voir dans cette section.

1.2.1 Définitions de l'ensemble des complexes et de deux opérations entre complexes

Définition 1.2.1. *L'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, est l'ensemble des couples de réels*

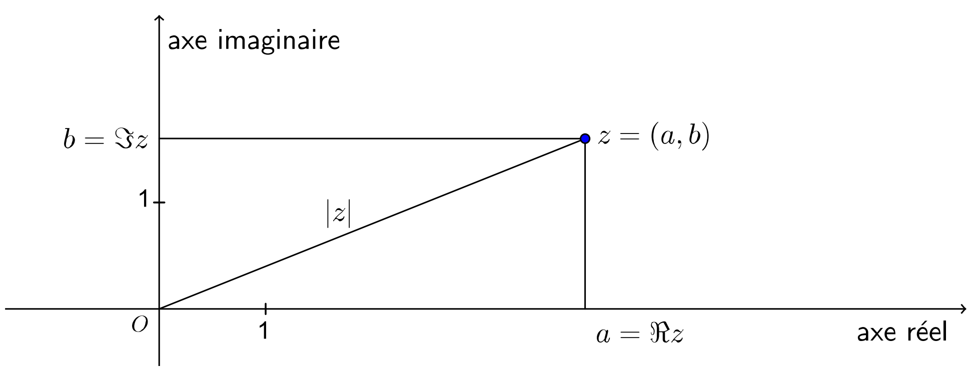
$$\mathbb{C}=\{(a,b)\ :\ a,b\in\mathbb{R}\}.$$

Par définition, deux complexes (a,b) et (a',b') sont égaux lorsque $a=a'$ et $b=b'$.

On a directement à notre disposition une représentation graphique de $\mathbb{C}$: si on considère le plan muni d'un repère orthonormé, tout point du plan définit un complexe et tout complexe définit un point du plan.

Si $z=(a,b)$ est un complexe, le réel a s'appelle *la partie réelle* du complexe et le réel b s'appelle *la partie imaginaire* du complexe. On utilise les notations

$$\Re z=a,\quad \Im z=b.$$



On dit que l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels est inclus dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des complexes en identifiant les réels aux couples $(a,0)$, $a\in\mathbb{R}$. Les réels sont donc les complexes dont la partie imaginaire est nulle. Le complexe nul est le couple $(0,0)$. Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle et dont la partie imaginaire est non nulle est appelé *nombre complexe imaginaire pur.*

Dans l'ensemble des nombres complexes, on définit deux opérations fondamentales, l'*addition de deux complexes* et la *multiplication de deux complexes.* L'addition aura immédiatement une interprétation claire (elle se traduira par l'addition de deux vecteurs du plan). Quant à la multiplication, on verra son interprétation plus tard, à l'aide de rotations ; il faut bien se garder de l'interpréter à l'aide d'un produit quelconque de vecteurs !!

6. A titre d'exercice, montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Définition 1.2.2. *Addition de deux complexes, opération notée + :* $(a, b)+(c, d) = (a+c, b+d)$. *Multiplication de deux complexes, opération notée* $\times$ *(ou encore par un blanc, comme dans le cadre réel) :* $(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Remarquons que l'on a le cas particulier suivant (a, b, r sont des réels) :

$$(r, 0) \times (a, b) \;=\; (ra - 0b, rb + 0a) \;=\; (ra, rb) \;=\; (a, b) \times (r, 0),$$

ce qui s'écrit, si on identifie les réels aux couples de complexes de partie imaginaire nulle,

$$r\,(a, b) \;=\; (ra, rb).$$

En particulier, pour $r = 1$, c'est-à-dire le complexe $(1, 0)$, on a

$$(1, 0) \times (a, b) \;=\; (a, b) \;=\; (a, b) \times (1, 0),$$

ce qui signifie que 1 est neutre pour la multiplication. Et pour $a = 0$ et $b = 1$, on obtient (cela sera utilisé dans la suite)

$$(r, 0) \times (0, 1) \;=\; (r0 - 01, r1 + 0) \;=\; (0, r) \;=\; (0, 1) \times (r, 0)$$

ou encore

$$r(0, 1) \;=\; (0, r) \;=\; (0, 1)r.$$

Il est clair (et important !) de noter que ces opérations d'addition et de multiplication que l'on vient de définir, restreintes à $\mathbb{R}$, rendent les opérations usuelles de $\mathbb{R}$!

1.2.2 Propriétés

La première propriété est une généralisation de ce qui se passe dans $\mathbb{R}$.

Propriété(s) 1.2.3. *Soient* (a, b) *et* (c, d) *deux complexes. On a*

$$(a, b) \times (c, d) = (0, 0) \quad \text{si et seulement si} \quad (a, b) = (0, 0) \text{ ou } (c, d) = (0, 0).$$

Autrement dit, le produit de deux complexes est nul si et seulement si l'un d'entre eux est nul.

Preuve. On a $(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc) = (0, 0)$ si et seulement si

$$\begin{cases} ac - bd = 0 \\ ad + bc = 0. \end{cases}$$

Si $a \neq 0$, en exprimant c en fonction de a dans la première relation et en l'introduisant dans la seconde, on voit que le système est équivalent à

$$\begin{cases} c = bd/a \\ d(a^2 + b^2) = 0 \end{cases}$$

donc est équivalent à $d = c = 0$. Si $a = 0$ et $b \neq 0$, on est conduit à la même conclusion.$\square$

Passons aux autres propriétés essentielles des opérations introduites.

Propriété(s) 1.2.4. *Pour l'addition et la multiplication entre deux complexes, on a les propriétés suivantes :*

— *l'ensemble* $\mathbb{C}$ *muni de l'addition est un* groupe commutatif *de neutre* $0 = (0, 0)$ [7]

7. Cela signifie que l'addition possède les propriétés suivantes :

— *l'ensemble* $\mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}$ *muni de la multiplication est un* groupe commutatif *de neutre* $(1,0)$ [8]
— *la multiplication distribue l'addition* [9].

On dit que $\mathbb{C}$ *muni de l'addition* $+$ *et de la multiplication* $\times$ *est un* corps commutatif.

Preuve. Tout se vérifie en appliquant les définitions. □

Attention, on montre que dans $\mathbb{C}$ (avec les opérations définies ci-dessus), il n'y a *pas de relation d'ordre* compatible avec la structure de corps. **On ne doit donc JAMAIS écrire des inégalités faisant intervenir des nombres complexes.**

Parmi les propriétés ci-dessus, revenons sur celle qui dit que *pour tout complexe non nul* (a,b), *il existe un complexe unique* (c,d) *tel que*

$$(a,b) \times (c,d) = (1,0).$$

On dit que tout complexe non nul possède un inverse pour la multiplication. L'inverse du complexe non nul $z = (a,b)$ est noté $\frac{1}{z}$ ou encore z^{-1} ; il est donné par

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right).$$

1.2.3 Introduction du complexe i et notations pratiques

Avec la convention d'écriture d'un blanc en lieu et place du signe $\times$ et l'identification d'un réel comme étant un complexe particulier, la relation

$$(r,0) \times (a,b) = (a,b) \times (r,0)$$

s'écrit

$$rz = zr, \quad 1z = z1 = z \text{ si } r = 1$$

avec $z = (a,b)$.

Définition 1.2.5. *On pose*

$$i = (0,1).$$

Propriété(s) 1.2.6. *1) En tenant compte de l'identification de* $\mathbb{R}$ *comme sous-espace de* $\mathbb{C}$*, tout nombre complexe* (a,b) *s'écrit*

$$z = (a,b) = a + bi.$$

2) On a

$$i^2 = (0,1) \times (0,1) = -1.$$

— associativité : pour tous complexes z_1, z_2, z_3, on a $(z_1+z_2)+z_3 = z_1+(z_2+z_3)$
— existence d'un neutre : le complexe $e = (0,0)$ est tel que $e+z = z+e = z$ pour tout complexe z
— tout complexe possède un symétrique (ici, on parle aussi d'opposé) : pour tout z, il existe z' tel que $z+z' = e = z'+z$
— commutativité : pour tous complexes z, z', on a $z+z' = z'+z$.

8. Cela signifie que la multiplication possède les propriétés suivantes :
— associativité : pour tous complexes z_1, z_2, z_3, on a $(z_1 \times z_2) \times z_3 = z_1 \times (z_2 \times z_3)$
— existence d'un neutre : le complexe $e = (1,0)$ est tel que $e \times z = z \times e = z$ pour tout complexe z
— tout complexe non nul possède un symétrique (ici, on parle plutôt d'inverse) : pour tout $z \neq 0$, il existe z' tel que $z \times z' = e = z' \times z$
— commutativité : pour tous complexes z, z', on a $z \times z' = z' \times z$.

9. Cela signifie que pour tous complexes c, z_1, z_2, on a $c \times (z_1+z_2) = c \times z_1 + c \times z_2$.

Preuve. 1) On a en effet

$$z \; = \; (a,b) \; = \; (a,0)+(0,b) \; = \; a(1,0)+b(0,1) \; = \; a+bi.$$

2) Il suffit d'appliquer la définition du produit entre complexes. □

Grâce à l'introduction du complexe i et aux propriétés vérifiées par l'addition et la multiplication, **le calcul algébrique entre complexes** apparaît comme une **généralisation naturelle du calcul dans** $\mathbb{R}$ en tenant compte de $\underline{i^2=-1}$. Ainsi par exemple

$$(a,b)\times(c,d)=(ac-bd, ad+bc)$$

par définition. Si l'on écrit

$$z=(a,b)=a+bi, \quad z'=(c,d)=c+di$$

et que l'on applique les propriétés des opérations (d'abord la distributivité), on a

$$(a+ib)\;(c+id)=ac+iad+ibc+i^2bd=ac-bd+i(bc+ad),$$

ce qui est bien le complexe de partie réelle $ac-bd$ et de partie imaginaire $bc+ad$ comme annoncé.

L'inverse du complexe non nul $z=a+ib$ s'écrit donc, en multipliant le numérateur et le dénominateur par $a-ib$,

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i.$$

Par exemple, on a

$$\begin{aligned}(3i+1)\;i\;(1-i) &= (3i+1)(i-i^2)=(3i+1)(i+1)\\ &= 3i^2+3i+i+1\\ &= -3+3i+i+1\\ &= -2+4i.\end{aligned}$$

De manière analogue, les parties réelle et imaginaire de $z=\frac{i}{2i-1}$ sont $2/5$ et $-1/5$, c'est-à-dire

$$z=\frac{i}{2i-1}=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i.$$

En effet

$$\frac{i}{2i-1}=i\;\frac{1}{2i-1}=i\;\frac{-1-2i}{2^2+(-1)^2}=\frac{1}{5}(2-i).$$

1.2.4 Module et conjugué d'un complexe

Définition 1.2.7. *Soit $z=(a,b)=a+bi$ un complexe ($a,b\in\mathbb{R}$).*

Le complexe conjugué de z, noté $\overline{z}$, est le complexe

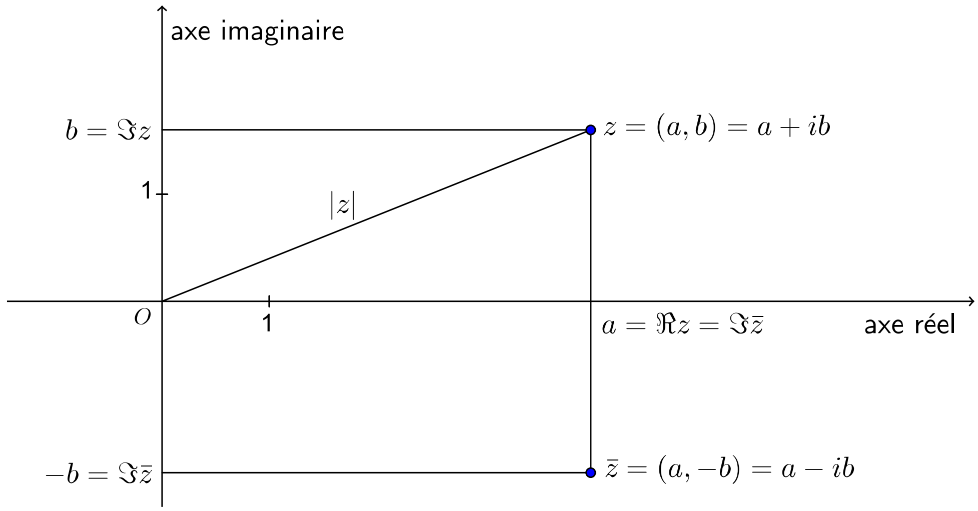
$$\bar{z}=(a,-b)=a-bi,$$

c'est-à-dire le complexe qui a la même partie réelle que z mais dont la partie imaginaire est l'opposé de celle de z. Graphiquement, il est le symétrique de z par rapport à l'axe réel.

Le module du complexe z, noté $|z|$, est le nombre réel positif

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2},$$

c'est-à-dire la longueur du vecteur d'origine O et dont l'extrémité est le point du plan de coordonnées (a,b).



On vérifie directement les propriétés suivantes.

Propriété(s) 1.2.8. *1.* $|\overline{z}| = |z|$ *pour tout complexe* z

2. $|\Re z| \leq |z|, \quad |\Im z| \leq |z|$ *pour tout complexe* z

3. $|z|^2 = z\bar{z}$ *pour tout complexe* z

4. $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ *pour tout complexe non nul* z

5. $|z_1 z_2| = |z_1|\ |z_2|, \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ *pour tous complexes* z_1, z_2

6. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ *pour tous complexes* z_1, z_2.

On voit aussi directement que

$$\frac{z + \bar{z}}{2} = \Re z, \quad \frac{z - \bar{z}}{2i} = \Im z$$

pour tout nombre complexe z.

1.2.5 Racines carrées d'un nombre complexe

Théorème 1.2.9. *On a* $z^2 = 0$ *si et seulement si* $z = 0$.

Si u *est un complexe non nul, alors il possède deux racines carrées opposées. Cela signifie que l'équation en l'inconnue* z

$$u = z^2$$

possède exactement deux solutions, qui sont des complexes opposés.

Preuve. Comme le produit de deux complexes est nul si et seulement si l'un d'entre eux est nul, on obtient bien $z^2 = 0$ si et seulement si $z = 0$.

Dans le cas $u \neq 0$, écrivons

$$u = a + bi, \qquad a = \Re u \in \mathbb{R}, \quad b = \Im u \in \mathbb{R}.$$

Si $b = 0$ et $a > 0$, on a $z^2 = u = a$ si et seulement si $z^2 - (\sqrt{a})^2 = 0$, ou encore si et seulement si $(z - \sqrt{a})\ (z + \sqrt{a}) = 0$. L'équation $z^2 = a$ avec $a > 0$ a donc les deux solutions réelles $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Si $b = 0$ et $a < 0$, on a

$$\begin{aligned} z^2 = u = a \quad &\Leftrightarrow \quad z^2 + i^2 a = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad z^2 - i^2(\sqrt{-a})^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (z - i\sqrt{-a})\,(z + i\sqrt{-a}) = 0. \end{aligned}$$

L'équation $z^2 = a$ avec $a < 0$ a donc les deux solutions $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$, lesquelles sont des nombres complexes imaginaires purs.

Considérons maintenant le cas $b \neq 0$. On cherche $x, y \in \mathbb{R}$ tels que, en posant $z = x + iy$:

$$z^2 = (x + iy)^2 = u = a + ib.$$

Comme $(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, on obtient

$$z^2 = u \ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = x^2 - y^2 \\ b = 2xy \end{array} \right. \ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{b}{2x} \\ a = x^2 - \frac{b^2}{4x^2} \end{array} \right. \ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{b}{2x} \\ 4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0. \end{array} \right.$$

L'équation $4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0$ se résout en posant $X = x^2$. On a

$$4X^2 - 4aX - b^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \quad \text{ou} \quad X = \frac{a - \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

car $\Delta = 16(a^2 + b^2) > 0$. Comme $a - \sqrt{a^2 + b^2} < 0$, on trouve finalement

$$4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0 \ \Leftrightarrow X = x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Il s'ensuit que l'équation de départ possède bien deux solutions opposées, à savoir le complexe

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i\frac{b}{2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}} \\ &= \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i\frac{b}{2\sqrt{\frac{(a^2+b^2)-a^2}{2}}}\sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} - a} \\ &= \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \end{aligned}$$

et son opposé. □

Noter que la preuve de l'existence des « racines » est constructive et fournit donc le moyen de les trouver explicitement. **Il ne FAUT PAS apprendre les solutions par coeur !!!** Cela conduira à court terme à des erreurs (infidélité de mémoire).

Par ailleurs, il ne faut pas oublier que la notation $\sqrt{\ }$ désigne « <u>la fonction</u> racine carrée », définie sur l'ensemble des réels positifs. **Il est donc incorrect** d'utiliser la notation $\sqrt{z}$ lorsque z est un complexe : cela n'a en effet aucun sens.

En guise d'exemples, cherchons les racines carrées des complexes

$$z_1 = -4, \quad z_2 = i, \quad z_3 = -5 + 12i.$$

On a $z_1 = 4i^2$; dès lors, les racines carrées de z_1 sont $2i$ et $-2i$.

Cherchons $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $(x+iy)^2 = i$. On a

$$\begin{aligned}(x+iy)^2 = i \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 0 = x^2 - y^2 \\ 1 = 2xy \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = y \\ 1 = 2x^2 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} x = -y \\ 1 = -2x^2 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = y \\ 1 = 2x^2. \end{array}\right.\end{aligned}$$

Les deux racines carrées de i sont donc $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

Cherchons $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $(x+iy)^2 = -5+12i$. On a

$$(x+iy)^2 = -5+12i \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -5 = x^2 - y^2 \\ 6 = xy. \end{array}\right.$$

En remplaçant y par $6/x$ dans la première équation, on trouve

$$x^4 + 5x^2 - 36 = 0.$$

Comme $\Delta = 25 + 4.36 = 169 = 13^2$, cette équation a comme solutions $x = 2$ et $x = -2$. Dès lors, les deux racines carrées de $-5+12i$ sont $2+3i$ et $-(2+3i)$.

1.2.6 Trinôme du second degré

Propriété(s) 1.2.10. *Le polynôme $z \mapsto P(z) = az^2 + bz + c$ où a, b, c sont des complexes et $a \neq 0$ admet toujours deux zéros (deux zéros distincts ou un zéro double).*

Plus précisément, si on pose $\Delta = b^2 - 4ac$ et si z_0 est un complexe tel que $z_0^2 = \Delta$ alors les zéros de ce polynôme sont

$$\frac{-b+z_0}{2a}, \quad \frac{-b-z_0}{2a}.$$

Si a, b, c sont réels, et si $\Delta < 0$ alors les zéros sont des complexes conjugués.

Preuve. On a

$$\begin{aligned} P(z) &= a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = a\left(z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) \\ &= a\left((z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) = a\left((z+\frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) \\ &= a\left((z+\frac{b}{2a})^2 - \frac{z_0^2}{4a^2}\right) = a\left(z + \frac{b-z_0}{2a}\right)\left(z + \frac{b+z_0}{2a}\right) \\ &= a(z-z_1)(z-z_2) \end{aligned}$$

avec $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $z_0^2 = \Delta$ et

$$z_1 = \frac{-b+z_0}{2a}, \qquad z_2 = \frac{-b-z_0}{2a}.$$

On a $z_1 = z_2$ si et seulement si $\Delta = 0$, auquel cas $z_1 = z_2 = -b/2a$.

Si a, b, c sont réels et $\Delta < 0$ alors z_0 est imaginaire pur. Vu la forme de z_1 et z_2 on a bien $\overline{z_1} = z_2$. $\square$

1.2.7 Complexes et trigonométrie

On démontre que quel que soit le complexe z, la suite

$$\sum_{m=0}^{M} \frac{z^m}{m!}, \quad M \in \mathbb{N}_0$$

converge. Sa limite est appelée l'exponentielle de z et est notée

$$\lim_{M\to+\infty} \sum_{m=0}^{M} \frac{z^m}{m!} \;=\; \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{z^m}{m!} \;=\; \exp(z) \;=\; e^z \;=\; 1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots.$$

Cela étant, on démontre que, quels que soient les complexes z, z', on a

$$\exp(z+z') \;=\; \exp(z)\,\exp(z'),$$

ce qui explique d'ailleurs pourquoi on utilise la notation e^z qui rappelle les puissances (lesquelles ont justement la propriété $a^m\; a^n = a^{n+m}$ si a est un réel et n, m des naturels).

On a également

$$\overline{\exp(z)} \;=\; \exp(\bar{z}), \quad \exp(z)\,\overline{\exp(z)} \;=\; |\exp(z)|^2 \;=\; \exp(z+\bar{z}).$$

On définit alors rigoureusement les fonctions sinus et cosinus comme suit.

Définition 1.2.11. *Pour tout réel x, on définit*

$$\cos(x) = \Re(e^{ix}) \quad \textit{et} \quad \sin(x) = \Im(e^{ix}).$$

On en <u>déduit</u> que

$$\cos(x) + i\sin(x) = \exp(ix) = e^{ix}, \quad \cos(x) - i\sin(x) = \overline{e^{ix}} = e^{-ix}$$

pour tout réel x. De plus, comme $\Re z = \frac{z+\bar{z}}{2}$ et $\Im z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ pour tout complexe z, on <u>déduit</u> aussi de la définition que

$$\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

Des définitions précédentes, on déduit également ce qui suit.

Propriété(s) 1.2.12. *1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$|e^{ix}| = 1.$$

2) On a $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ pour tout réel x.
3) On a $(\cos(x) + i\sin(x))^m = \cos(mx) + i\sin(mx)$ pour tout naturel m et tout réel x.
4) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$, il existe $x \in [0, 2\pi[$ unique tel que

$$z = e^{ix}.$$

5) Quel que soit le complexe α, la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto e^{\alpha x}$ est indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$De^{\alpha x} \;=\; \alpha\, e^{\alpha x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Preuve. 1) On a $z\bar{z} = |z|^2$ pour tout complexe z. Il s'ensuit que

$$|e^{ix}|^2 = e^{ix}\ \overline{e^{ix}} = e^{ix}\ e^{-ix} = e^{ix-ix} = 1,$$

d'où la conclusion car le module d'un complexe est un réel positif ou nul.

2) On a

$$1 = |e^{ix}|^2 = (\Re(e^{ix}))^2 + (\Im(e^{ix}))^2 = \cos^2(x) + \sin^2(x).$$

3) On a

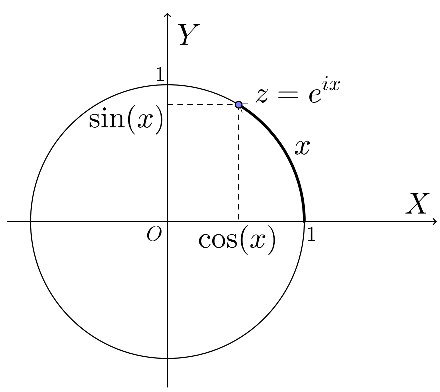
$$(\cos(x) + i\sin(x))^m = \left(e^{ix}\right)^m = e^{imx} = \cos(mx) + i\sin(mx).$$

4,5) Résultats admis.□

Ajoutons quelques autres propriétés.

1) Etant donné un complexe z de module 1, c'est-à-dire un point du plan situé sur le cercle centré à l'origine et de rayon 1, on sait qu'il existe un réel unique $x \in [0, 2\pi[$ tel que $z = e^{ix}$. On montre aussi que la longueur de l'arc de cercle joignant le complexe 1 au complexe z vaut x.

On obtient donc la représentation suivante.



2) La forme trigonométrique d'un nombre complexe consiste simplement à écrire celui-ci en se servant des coordonnées polaires du point du plan qu'il détermine.

Etant donné $z \in \mathbb{C},\ z \neq 0$, on sait qu'il existe un réel $x \in [0, 2\pi[$, unique, tel que

$$\frac{z}{|z|} = e^{ix}.$$

En posant

$$r = |z|,$$

on a

$$z = re^{ix};$$

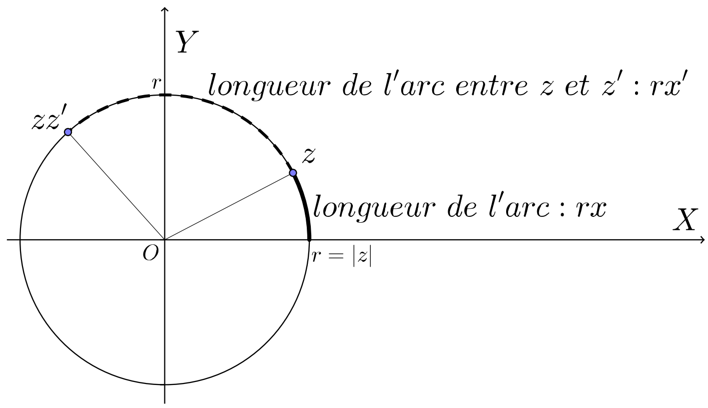
c'est ce que l'on appelle la forme trigonométrique du complexe z. Les réels r et x constituent également les coordonnées polaires du point P d'abscisse $\Re z$ et d'ordonnée $\Im z$.

3) Interprétons à présent la *multiplication de deux complexes.* Soient z, z' deux complexes non nuls. On peut écrire

$$z = re^{ix}, \quad z' = r'e^{ix'}$$

donc
$$zz' = rr'e^{i(x+x')}.$$
La multiplication de z par z' consiste donc en une multiplication par le réel r' (qui s'interprète comme la multiplication d'un vecteur par un réel) et en une rotation d'un angle x'.

Illustration lorsque $|z'| = r' = 1$.



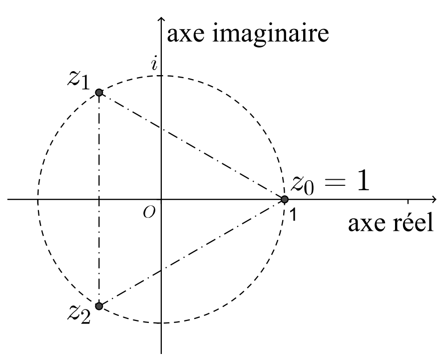
4) Grâce à la forme trigonométrique des complexes, on peut aussi démontrer que, pour tout complexe non nul z et tout naturel $n \geq 1$, il existe n complexes distincts $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ tels que
$$z_k^n = z, \quad \forall k = 0, \ldots, n-1.$$
On dit que les complexes z_k ($k = 0, \ldots, n-1$) sont les racines n-ièmes du complexe z.

La preuve est constructive : si
$$z = re^{ix}, \quad r > 0, x \in [0, 2\pi[,$$
on obtient en effet
$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{ix'_k}, \quad x'_k = \frac{x + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Les n racines n-ièmes d'un complexe sont donc les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle centré à l'origine et de rayon $\sqrt[n]{r}$; la mesure des angles entre les vecteurs joignant l'origine à deux racines consécutives est $\frac{2\pi}{n}$ radian(s).

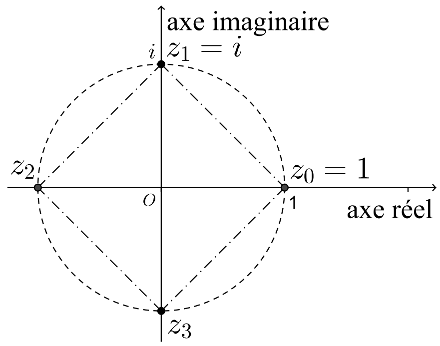
Voici trois exemples.

Les racines cubiques de $1 = e^{i0}$ sont $z_0 = 1$, $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}, z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Leur représentation est la suivante.



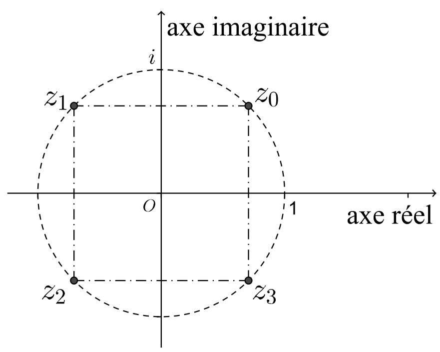
Représentation des racines cubiques de 1

Les racines quatrièmes de $1 = e^{i0}$ sont $z_0 = 1$, $z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $z_2 = e^{i\pi} = -1$, $z_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$. Leur représentation est la suivante.



Représentation des racines quatrièmes de 1

Les racines quatrièmes de $-1 = e^{i\pi}$ sont $z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}}$, $z_3 = e^{i\frac{7\pi}{4}}$. Leur représentation est la suivante.



Représentation des racines quatrièmes de -1

1.2.8 Pourquoi les complexes en biologie, une illustration parmi d'autres

Extrait trouvé via internet (≪ Comment mathématiser la biologie ≫, Pablo Meyer) : *Max Perutz (1914-2002) : La fonction biologique d'une protéine est déterminée par sa structure (c'est-à-dire par sa conformation en 3 dimensions), laquelle dépend des propriétés physiques et chimiques de l'ensemble des acides aminés la composant. Les structures de protéines ne peuvent être déterminées qu'expérimentalement par cristallisation de la protéine et étude de cette forme cristalline par diffraction des rayons X. Le physicien Max Perutz, réussit en 1959 à ≪ remonter ≫, par un procédé mathématique, des clichés de diffraction X à la structure de la protéine – en l'occurrence l'hémoglobine.*

La cristallographie manipule les nombres complexes...

1.3 Rappels sur les fonctions élémentaires

Il est **indispensable** de bien connaître les fonctions élémentaires (polynômes et fractions rationnelles, fractions irrationnelles, fonctions trigonométriques et fonctions trigonométriques inverses (on dit aussi fonctions trigonométriques réciproques), fonction exponentielle, fonction logarithme) et leurs propriétés. Ici encore, on renvoie au cours de première année et au syllabus *Bases* (cf la bibliographie).

1.4 Rappels sur la dérivation des fonctions d'une variable

Rappelons que si f est une fonction d'une variable réelle définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ (ou sur une union de tels intervalles), on dit qu'elle est dérivable sur I lorsque, quel que soit $x \in I$, la limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existe et est finie. On note

$$Df(x)$$

la valeur de cette limite et on appelle dérivée (ou fonction dérivée) de f sur I la fonction définie sur

$$Df(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad x \in I.$$

Cette fonction est notée Df. Le domaine de dérivabilité d'une fonction est le plus grand ensemble ouvert de points où elle est dérivable. Il est important de bien noter qu'il ne s'agit pas toujours du domaine de définition de la fonction Df. Pour s'en convaincre, il suffit par exemple de considérer la fonction ln, dont le domaine de dérivabilité est $]0, +\infty[$. Sa dérivée, à savoir la fonction $x \mapsto 1/x$, est quant à elle définie sur $\mathbb{R}_0$!

Dans ce cours, la notation f' pour la dérivée Df de la fonction f ne doit **PAS** être utilisée car elle est source de confusion (tache sur la feuille, quid des dérivées multiples et, plus loin, définitions des dérivées partielles).

Pour une interprétation graphique, la notion de tangente au graphique d'une fonction, les diverses dérivées des fonctions élémentaires, la dérivation des fonctions de fonctions, la dérivation des fonctions inverses (on dit aussi fonctions réciproques), on renvoie au cours de première année et au syllabus *Bases* (cf la bibliographie).

1.5 Equations différentielles

Nous ne présentons ici que quelques notions relatives aux équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et d'ordre 2.

Il s'agit d'équations différentielles qui s'écrivent

$$\boxed{aDf(x) + bf(x) = g(x)} \text{ (ordre 1)} \qquad \boxed{aD^2f(x) + bDf(x) + cf(x) = g(x)} \text{ (ordre 2)}$$

où a, b, c sont des constantes complexes, où $a \neq 0$ et où g est une fonction continue sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. Lorsque

$$g = 0$$

on dit que l'équation est

homogène.

Etant donné une équation générale d'ordre 1 ou 2, on dira que la même équation, mais avec le second membre g égal à 0, est l'équation homogène associée à l'équation de départ.

La propriété ci-dessous justifie l'appellation « linéaire » de ce type d'équations.

Propriété(s) 1.5.1. *Si f_1, f_2 sont solutions de l'équation homogène (d'ordre 1 ou d'ordre 2) et si r, s sont des complexes, alors la fonction $rf_1 + sf_2$ est aussi solution de la même équation.*

Cette propriété de linéarité permet de donner la structure de l'ensemble des solutions.

Proposition 1.5.2. *Soit f_0 une solution de l'équation générale d'ordre 1 (resp. d'ordre 2) encadrée ci-dessus.*

Si f est une solution de la même équation, alors $f - f_0$ est une solution de l'équation homogène associée.

Réciproquement, si h est une solution de l'équation homogène associée, alors la fonction $f = f_0 + h$ est solution de la même équation que f_0.

Pour trouver l'ensemble des solutions, il suffit donc de trouver l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée et une solution particulière.

1.5.1 Equations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1

Théorème 1.5.3. *L'ensemble des solutions de l'équation homogène d'ordre 1*

$$\boxed{aDf + bf = 0}$$

($a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$) est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ qui s'écrivent

$$\boxed{f(x) = ce^{-\frac{b}{a}x}}$$

où c est une constante arbitraire complexe. Si a, b sont réels et si on cherche uniquement les solutions réelles de l'équation, on ne prendra que $c \in \mathbb{R}$.

Remarquons que le coefficient qui apparaît dans l'exponentielle de la solution, à savoir $-b/a$, est la solution de l'équation $az + b = 0$ appelée *équation caractéristique* associée à l'équation différentielle $aDf + bf = 0$. Le polynôme $z \mapsto az + b$ est appelé *polynôme caractéristique* associé à l'équation différentielle.

Passons à la recherche d'une solution particulière. On a les résultats suivants.

Proposition 1.5.4 (Méthode de la « variation des constantes »)**.** *Soit l'équation différentielle*

$$aDf(x) + bf(x) = g(x),$$

où $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ et g est continu sur un intervalle ouvert I. Si P est une primitive de $x \mapsto e^{(b/a)x}\, g(x)/a$ sur I, une solution particulière de l'équation est donnée par

$$P(x)\, e^{-\frac{b}{a}x}, \ x \in I$$

La vérification est bien sûr immédiate.

Mais expliquons pourquoi on donne ce nom « variation des constantes » à cette méthode. La méthode consiste à chercher une solution particulière sous la forme

$$F : x \mapsto C(x)e^{-(b/a)x}$$

On exprime donc en fait que la constante qui intervient dans la solution de l'équation homogène est une fonction. On cherche donc une fonction $C(x)$ $(x \in I)$ telle que la fonction F soit solution de l'équation différentielle. Comme on a

$$\begin{aligned} aD\left(C(x)e^{-(b/a)x}\right) &= aDC(x)\,e^{-(b/a)x} + a\,C(x)\left(\frac{-b}{a}\right)e^{-(b/a)x} \\ &= (aDC(x) - bC(x))\,e^{-(b/a)x}, \end{aligned}$$

on obtient donc que la fonction F est solution de l'équation si et seulement si

$$aD\left(C(x)e^{-(b/a)x}\right) + bC(x)e^{-(b/a)x} = g(x),$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$aDC(x)\,e^{-(b/a)x} = g(x) \Leftrightarrow DC(x) = \frac{1}{a}\,e^{(b/a)x}\,g(x),$$

ce qui signifie que C est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{a}\,e^{(b/a)x}\,g(x)$.

Dans le cas où le second membre est une fonction du type « exponentielle polynôme », c'est-à-dire lorsque le second membre g est une fonction qui s'écrit comme le produit d'un polynôme par une exponentielle $e^{\alpha x}$, il existe toujours une solution qui a une forme bien particulière (ce résultat se déduit du cas précédent).

Propriété(s) 1.5.5. *Soit l'équation*

$$aDf(x) + bf(x) = P(x)e^{\alpha x}$$

avec $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, P polynôme et $\alpha \in \mathbb{C}$.

Si $\alpha \neq -\frac{b}{a}$, il existe un polynôme Q de même degré que celui de P tel que

$$f(x) = Q(x)e^{\alpha x}$$

vérifie l'équation non homogène.

Si $\alpha = -\frac{b}{a}$, c'est-à-dire si α est zéro du polynôme caractéristique, il existe un polynôme Q de même degré que celui de P tel que

$$f(x) = x\ Q(x)e^{\alpha x}$$

vérifie l'équation non homogène.

1.5.2 Equations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 2

Les méthodes de l'ordre 1 s'adaptent aux équations d'ordre 2.

Considérons l'équation $\boxed{aD^2f + bDf + cf = 0}$ avec a, b, c complexes, $a \neq 0$. Le polynôme $z \mapsto az^2+bz+c$ est appelé *polynôme caractéristique* associé à l'équation différentielle et l'équation $az^2 + bz + c = 0$ est appelée *équation caractéristique* associée à l'équation différentielle. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ et on désigne par z_1, z_2 les zéros du polynôme caractéristique.

Théorème 1.5.6. *Lorsque $\Delta = 0$, on a $z_1 = z_2 = -b/(2a)$; l'ensemble des solutions de l'équation homogène d'ordre 2 est l'ensemble des fonctions qui s'écrivent*

$$\boxed{f(x) = (c_1x + c_2)e^{-\frac{b}{2a}x},\ x \in \mathbb{R}}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Lorsque $\Delta \neq 0$, on a $z_1 \neq z_2$; l'ensemble des solutions de l'équation homogène d'ordre 2 est l'ensemble des fonctions qui s'écrivent

$$\boxed{f(x) = c_1 e^{z_1 x} + c_2 e^{z_2 x},\ x \in \mathbb{R}}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Notons qu'on appelle *solutions fondamentales (ou base de solutions)* de l'équation homogène $aD^2 f + bDf + cf = 0$ $(a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0)$ des fonctions u_1, u_2 définies et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ qui sont solutions de l'équation et qui sont telles que toute autre solution de l'équation s'écrive comme une combinaison linéaire de ces fonctions.

Lorsque a, b, c sont réels, $\Delta = b^2 - 4ac$ est positif ou négatif. S'il est positif, alors z_1 et z_2 sont réels. S'il est négatif, on a vu que les zéros z_1, z_2 de $z \mapsto P(z) = az^2 + bz + c$ sont des complexes conjugués. Il s'ensuit que les combinaisons linéaires de $e^{z_1 x}$ et $e^{z_2 x}$ vont s'écrire comme combinaisons linéaires de deux fonctions faisant intervenir les fonctions sinus et cosinus prises en le même argument.

On a alors le résultat suivant.

Propriété(s) 1.5.7. *Supposons $a, b, c \in \mathbb{R}$.*

Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ alors l'ensemble des solutions réelles de l'équation homogène d'ordre 2 est l'ensemble des fonctions qui s'écrivent

$$\boxed{f(x) = r_1 e^{z_1 x} + r_2 e^{z_2 x}}$$

où r_1, r_2 sont des constantes réelles arbitraires.

Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ alors l'ensemble des solutions réelles de l'équation homogène d'ordre 2 est l'ensemble des fonctions qui s'écrivent

$$\boxed{f(x) = r_1 x e^{-\frac{b}{2a}x} + r_2 e^{-\frac{b}{2a}x}}$$

où r_1, r_2 sont des constantes réelles arbitraires.

Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ alors l'ensemble des solutions réelles de l'équation homogène d'ordre 2 est l'ensemble des fonctions qui s'écrivent

$$\boxed{f(x) = e^{\frac{-b}{2a}x}\left(r_1 \cos(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x) + r_2 \sin(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x)\right)}$$

où r_1, r_2 sont des constantes réelles arbitraires.

Cela étant, passons à la recherche d'une solution particulière. On a les résultats suivants.

Proposition 1.5.8. *Soit l'équation différentielle*

$$aD^2 f(x) + bDf(x) + cf(x) = g(x)$$

où $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ et g est continu sur un intervalle ouvert I. Notons u_1, u_2 des solutions fondamentales de l'équation homogène associée.

Soient C_1, C_2 les fonctions de $x \in I$ uniques solutions[10] *continues du système (en fait un système d'équations linéaires pour chaque $x \in I$)*

$$\left\{\begin{array}{lcl} C_1(x)u_1(x) + C_2(x)u_2(x) & = & 0 \\ C_1(x)Du_1(x) + C_2(x)D_x u_2(x) & = & \frac{g(x)}{a}. \end{array}\right.$$

10. Ici aussi, on appelle cette méthode la « variation des constantes » car elle consiste à exprimer, à partir de la solution générale de l'équation homogène $f(x) = c_1 e^{z_1 x} + c_2 e^{z_2 x}$ ou $f(x) = c_1 x e^{z_1 x} + c_2 e^{z_1 x}$, les constantes c_1, c_2 comme des fonctions (de x).

Si P_1, P_2 désignent deux primitives respectivement de C_1, C_2 alors une solution particulière de l'équation est donnée par la fonction

$$P_1(x)\ u_1(x) + P_2(x)\ u_2(x),\ x \in I.$$

Comme dans le cas de l'ordre 1, on obtient un résultat particulier lorsque le second membre est une fonction de type ≪ exponentielle-polynôme ≫.

Propriété(s) 1.5.9. *Soit l'équation*

$$aD^2 f(x) + bDf(x) + cf(x) = P(x)e^{\alpha x}$$

avec $a, b, c \in \mathbb{C},\ a \neq 0,\ P$ polynôme et $\alpha \in \mathbb{C}$.

Si α n'est pas un zéro du polynôme caractéristique, il existe un polynôme Q de même degré que celui de P tel que

$$f(x) = Q(x)e^{\alpha x}$$

vérifie l'équation non homogène.

Si α est un zéro simple du polynôme caractéristique, il existe un polynôme Q de même degré que celui de P tel que

$$f(x) = x\ Q(x)e^{\alpha x}$$

vérifie l'équation non homogène.

Si α est un zéro double du polynôme caractéristique, il existe un polynôme Q de même degré que celui de P tel que

$$f(x) = x^2\ Q(x)e^{\alpha x}$$

vérifie l'équation non homogène.

1.6 Approximations polynomiales

1.6.1 Introduction

Une fonction est parfois difficile à utiliser en raison de la complexité de son expression. Quand elle apparaît dans la modélisation d'un phénomène physique, chimique ou biologique particulier (force des marées, répartition de la température dans un corps ...), on doit pourtant l'utiliser pour prévoir et décrire les conséquences de ce phénomène.

On est alors dans l'obligation de faire des ≪ approximations ≫. Celles-ci peuvent revêtir diverses formes. Ici, nous ne considérons que les *approximations polynomiales*, c'est-à-dire des approximations des valeurs d'une fonction par des valeurs de polynômes, bien plus aisés à manipuler. Il convient aussi de noter que les calculatrices les utilisent pour donner les valeurs des fonctions trigonométriques, racines, exponentielle et logarithme.

Mais qui dit ≪ approximation ≫ se doit de définir ce qu'il entend par là ! Etre ≪ proche ≫, qu'est-ce que cela signifie ? Cela peut prendre tellement de significations ! Il est donc essentiel de donner une définition précise de ce que cela signifie dans le présent contexte.

1.6.2 Définition et interprétation graphique

Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. Soient aussi un point x_0 de I et un naturel strictement positif n. *Une approximation polynomiale de f à l'ordre n en x_0 est un polynôme $x \mapsto P(x - x_0)$ de degré inférieur ou égal à n tel que*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P(x - x_0)}{(x - x_0)^n} \ = \ 0.$$

Si f est continu en x_0 alors l'égalité précédente est vérifiée avec le polynôme constant $f(x_0)$ et on dit que $f(x_0)$ est approximation polynomiale de f en x_0 à l'ordre 0.

L'annulation de la limite du membre de gauche de l'égalité précédente signifie que ≪ la différence entre les valeurs de f et de son approximation est d'autant plus petite que x est proche de x_0 ≫.

Ainsi par exemple, f est dérivable en x_0 si et seulement si la limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

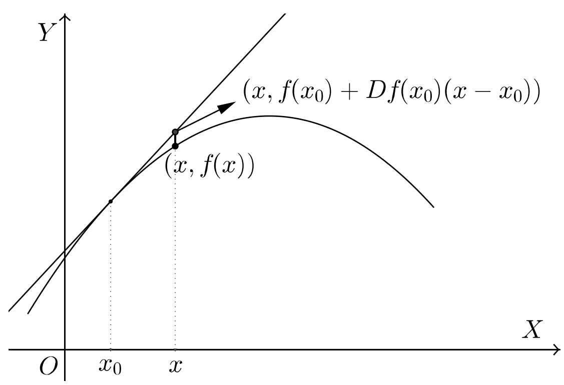
existe et est finie ; cette limite, notée $Df(x_0)$ est donc telle que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \; - \; Df(x_0) \; = \; 0,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) \; - \; Df(x_0)\,(x - x_0)}{x - x_0} \; = \; \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \Big(f(x_0) + Df(x_0)\,(x - x_0)\Big)}{x - x_0} \; = \; 0.$$

Le polynôme $x \mapsto f(x_0) + Df(x_0)\,(x - x_0)$ est donc une approximation polynomiale de la fonction f à l'ordre 1 en x_0. Sa représentation graphique est la droite d'équation cartésienne $y = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)$ (la tangente au graphique de f au point $(x_0, f(x_0))$). Le numérateur de la fraction qui apparaît dans la limite ci-dessus est donc la différence entre l'ordonnée du point du graphique de f et du point de cette droite qui ont tous les deux x comme abscisse.



Graphique de f et de son approximation linéaire en x_0

1.6.3 Propriétés

Comme premières propriétés essentielles de la notion d'approximation, citons les deux suivantes.

(1) Si f admet une approximation polynomiale à l'ordre n en x_0 alors celle-ci est unique.

(2) Si n est un naturel strictement positif et si f est une fonction n fois dérivable sur un intervalle ouvert I alors, pour tout $x_0 \in I$, l'approximation à l'ordre n de f en x_0 est le polynôme

$$x \mapsto P_n(x - x_0) = \sum_{j=0}^{n} \frac{D^j f(x_0)}{j!} \; (x - x_0)^j.$$

Rappelons que $j!$ ($j \in \mathbb{N}_0$) est égal au produit des j premiers naturels non nuls et que $0! = 1$ par convention.

1.6.4 Le reste d'une approximation

Il est naturel de dire que le « reste » d'une approximation doit refléter la « correction » à apporter à cette approximation pour retrouver f. Ainsi dans le présent contexte, *le reste de l'approximation de f à l'ordre n au point x_0 est la fonction*

$$x \mapsto f(x) - P_n(x - x_0);$$

on désigne souvent cette fonction avec la notation R_n.

Un examen des valeurs du reste va donc fournir des informations sur la qualité de l'approximation : plus le reste est petit en valeur absolue, meilleure est l'approximation.

Par ailleurs un examen du signe du reste va fournir des indications quant aux positions relatives des graphiques de la fonction et de ses approximations. En effet, comme on a

$$R_n(x) \;=\; f(x) - P_n(x - x_0),$$

si $R_n(x) \geq 0$ (resp. $R_n(x) \leq 0$) en tout x voisin de x_0, alors le graphique de f est « au-dessus » (resp. « en dessous ») de celui de l'approximation, et cela au voisinage de x_0. Par contre si le reste change de signe lorsque $x \leq x_0$ et $x \geq x_0$, alors le graphique de l'approximation est au-dessus puis en dessous de celui de f, ou vice-versa.

Un résultat très utile pour examiner les valeurs du reste est le suivant.

Si $n \in \mathbb{N}_0$ et si f est une fonction $n+1$ fois dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, alors pour tous $x, x_0 \in I,\ x \neq x_0$, il existe un point u strictement compris entre x_0 et x tel que

$$\begin{aligned} f(x) \;&=\; \sum_{j=0}^{n} \frac{D^j f(x_0)}{j!}\,(x - x_0)^j \;+\; \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} D^{n+1} f(u) \\ &=\; P_n(x - x_0) \;+\; \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} D^{n+1} f(u). \end{aligned}$$

Ce résultat s'appelle *le développement limité de Taylor de f en x_0 à l'ordre $n+1$.*

Dans ces conditions, le reste R_n de l'approximation de f à l'ordre n en x_0 évalué en x s'écrit

$$R_n(x) \;=\; f(x) - P_n(x - x_0) \;=\; \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} D^{n+1} f(u).$$

L'étude du signe du reste au voisinage de x_0 pour préciser les positions relatives des graphiques peut ainsi se faire à partir de l'expresssion

$$\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} D^{n+1} f(u).$$

1.7 Rappel sur le calcul intégral à une variable

On ne considère que des fonctions continues ; la notion d'intégrabilité [11] pour des fonctions plus générales dépasse le cadre de ce cours. Nous rappelons ici quelques définitions. Pour les propriétés et les techniques d'intégration, encore une fois on renvoie au cours de première année et au syllabus *Bases* (cf la bibliographie).

Il est **indispensable** de maîtriser le calcul intégral à une variable car le calcul intégral à plusieurs variables est basé sur celui à une variable. . .

11. au sens de Lebesgue, seule notion vraiment intéressante pour les applications aux sciences

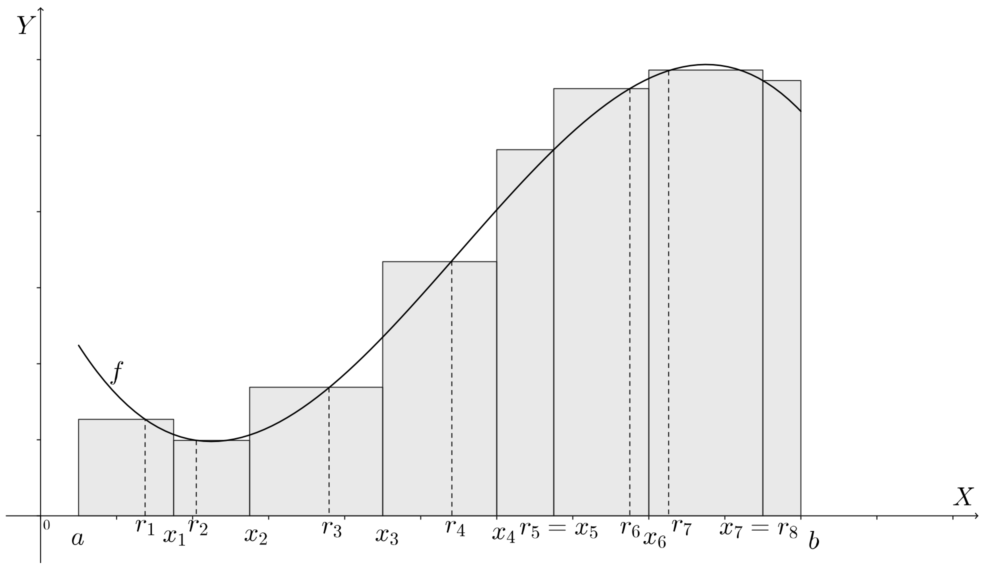
Soit f une fonction définie sur un intervalle borné fermé $I = [a, b]$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$).

On appelle *découpage à la Riemann* de l'intervalle $[a, b]$ la donnée

— (i) d'un naturel strictement positif n, de $n-1$ points[12] $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}$ de $]a, b[$

— (ii) de n points $r_1 \in [a, x_1], r_2 \in [x_1, x_2], \ldots, r_n \in [x_{n-1}, b]$.

On note un tel découpage σ ou plus précisément : $\{[a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b], (r_j)_{1\leq j\leq n}\}$. Plus simplement, un *découpage* est la donnée du seul point (i) ci-dessus. Par abus de langage, on utilisera souvent uniquement le substantif ≪ découpage ≫ pour désigner un découpage ou un découpage à la Riemann. Etant donné un découpage, la *largeur du découpage* est le nombre $\sup\{x_1 - a, x_2 - x_1, \ldots, b - x_{n-1}\}$, noté $L(\sigma)$. Pour simplifier les notations, posons aussi $x_0 = a, x_n = b$.



Sur ce dessin on a $n = 8, r_5 = x_5, r_8 = x_7$, la courbe est la représentation graphique de f et la somme $S(\sigma, f)$ correspond à la somme des aires des rectangles qui apparaissent (en traits pleins).

Considérons l'expression suivante

$$S(\sigma, f) = \sum_{k=1}^{n} f(r_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Cette somme $S(\sigma, f)$ dépend du choix des x_k, des r_k et de f. Quand la fonction f est à valeurs réelles positives, elle représente la somme des aires des rectangles de côtés $x_k - x_{k-1}$ et $f(r_k)$ $(k = 1, \ldots, n)$. L'idée est de regarder ce qui se passe lorsqu'on prend des découpages de plus en plus ≪ fins ≫, pour ≪ coller ≫ au mieux à la représentation graphique. Et si, à un certain sens que nous allons définir, tout se passe bien quand on passe à la limite, on dira que cette limite est l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$.

Vu la construction géométrique, si f est à valeurs positives, l'aire de la surface délimitée par le graphique de f, l'axe X et les droites verticales $x = a, x = b$ sera définie comme étant l'intégrale de f sur $[a, b]$.

En toute généralité, on va considérer une suite de découpages de l'intervalle $[a, b]$, c'est-à-dire la donnée de

$$\sigma_N = \{[a = x_0, x_1, \ldots, x_{J(N)-1}, b = x_{J(N)}], (r_j^N)_{1\leq j\leq J(N)}\}, \ (N \in \mathbb{N}_0)$$

12. Si $n = 1$, on ne donne pas de points supplémentaires.

où $J(N) \in \mathbb{N}_0$, $a < x_1 < \ldots < x_{J(N)-1} < b$, $r_j^N \in [x_{j-1}, x_j]$ $(j = 1, \ldots, J(N))$ et où les largeurs $L(\sigma_N)$ des découpages forment une suite qui tend vers 0.

Cela étant, on adopte la définition suivante pour l'intégrabilité d'une fonction sur un intervalle fermé borné.

Définition 1.7.1. *Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, à valeurs réelles ou complexes. On dit qu'elle est Riemann-*intégrable sur $[a, b]$ *si, pour toute suite de découpages σ_N $(N \in \mathbb{N}_0)$ de $[a, b]$ tels que $\lim_{N\to+\infty} L(\sigma_N) = 0$, la suite $S(\sigma_N, f)$ $(N \in \mathbb{N}_0)$ converge vers une limite finie.*

Dans ce cas, on démontre que toutes ces limites sont égales.

Définition 1.7.2. *La valeur commune de ces limites est appelée intégrale de Riemann de f sur $[a, b]$. L'intégrale de Riemann de f sur $[a, b]$ est notée*

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Dans la suite, on omettra souvent de signaler ≪ Riemann-intégrable ≫ ; on dira plus simplement ≪ intégrable ≫ et on parlera tout simplement d'intégrale.

Il est fondamental de connaître et de bien savoir utiliser le résultat suivant.

Propriété(s) 1.7.3. *Une fonction* **continue** *sur un intervalle* **fermé borné** *est intégrable sur cet intervalle.*

Il existe en fait plusieurs définitions de l'intégrale. La plus pratique (car elle peut être directement considérée sur un ensemble mesurable, et pas seulement sur un intervalle borné fermé de $\mathbb{R}$), la mieux adaptée au cas de plusieurs variables, la plus utilisée, est celle de Lebesgue [13]. Cependant, son introduction nécessite des préparatifs qu'il serait trop long de développer ici (notion d'ensemble négligeable, d'ensemble mesurable...). La définition de Riemann de l'intégrale est, quant à elle, facilement introduite dans le contexte d'un cours de mathématiques générales ; c'est la raison pour laquelle nous avons adopté la définition précédente. Signalons toutefois que les notions de Riemann-intégrabilité et Lebesgue-intégrabilité coïncident pour les fonctions continues sur des intervalles bornés fermés ; dans la suite, quand on va généraliser la notion d'intégrale à des intervalles plus généraux, c'est la notion de Lebesgue-intégrabilité qui guidera nos pas.

Pour **l'intégrabilité d'une fonction continue sur un intervalle non borné fermé, on utilise les définitions suivantes**. On va considérer des intervalles du type $[a, b[$ où a est réel et où b est un réel strictement plus grand que a ou représente $+\infty$. Les autres cas sont analogues.

Définition 1.7.4. *On dit qu'une fonction continue f sur $[a, b[$ est intégrable sur cet intervalle (ou tout simplement est intégrable en b^- si $b \in \mathbb{R}$, en $+\infty$ si $b = +\infty$) lorsque*

$$\lim_{t\to b} \int_a^t |f(x)|\, dx \quad \text{est fini.}$$

13. En ce qui concerne l'intégrale de Lebesgue, on a le résultat suivant, appelé critère de Riemann-intégrabilité de Lebesgue. Il nécessite la notion d'ensemble (Lebesgue-) négligeable (dont les exemples qui seront le plus rencontrés ici sont les ensembles dénombrables). *Une fonction f définie sur $[a, b]$ est Riemann-intégrable si et seulement si elle est bornée sur $[a, b]$ et telle que l'ensemble des points où elle n'est pas continue soit négligeable ; dans ce cas elle est Lebesgue-intégrable et les intégrales sont les mêmes.* Ainsi, pour les fonctions continues sur des intervalles fermés bornés, les deux notions sont les mêmes.

Par contre, si

$$\lim_{t\to b}\int_a^t |f(x)|\ dx = +\infty \qquad et \qquad \lim_{t\to b}\int_a^t f(x)\ dx \text{ existe et est fini },$$

on dit que f admet une intégrale fléchée en b *sur* $[a,b[$.

Si les comportements de $\int_a^t |f(x)|,\ t\in[a,b[$ et de $\int_a^t f(x),\ t\in[a,b[$ peuvent être différents, il existe cependant toujours un lien entre eux comme l'énonce la propriété suivante.

Propriété(s) 1.7.5. *Si* f *est intégrable sur* $[a,b[$, *c'est-à-dire si*

$$\lim_{t\to b}\int_a^t |f(x)|\ dx \quad \textit{est fini},$$

alors

$$\lim_{t\to b}\int_a^t f(x)\ dx \quad \textit{existe et est fini.}$$

La définition de l'intégrale d'une fonction continue f sur $[a,b[$ est alors donnée ci-dessous.

Définition 1.7.6. *Si* f *est intégrable sur* $[a,b[$, *c'est-à-dire si*

$$\lim_{t\to b}\int_a^t |f(x)|\ dx \quad \textit{est fini},$$

alors on note

$$\lim_{t\to b}\int_a^t f(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx$$

et on appelle ce nombre l'intégrale de f *sur* $[a,b[$.

Envisageons maintenant l'autre cas.

Définition 1.7.7. *Si*

$$\lim_{t\to b}\int_a^t |f(x)|\ dx = +\infty \quad et \quad \lim_{t\to b}\int_a^t f(x)\ dx \quad \textit{existe et est fini}$$

on dit que f admet une intégrale fléchée en b^- . *On utilise la notation*

$$\lim_{t\to b}\int_a^t f(x)\ dx = \int_a^{\to b} f(x)\ dx$$

et cette limite est appelée intégrale fléchée *de* f *en* $b-$ *si* $b\in\mathbb{R}$ *en* $+\infty$ *si* $b=+\infty$.

Rappelons que pour les propriétés et les techniques d'intégration, encore une fois on renvoie au cours de première année et au syllabus *Bases* (cf la bibliographie).

Il est aussi important de noter que **la notion de fonction intégrable n'est pas la même que celle donnée dans le cours de bloc 1 de Monsieur Van Messem ; *l'intégrabilité* définie ci-dessus est appelée ≪ intégrabilité absolue ≫ dans le cours de Monsieur Van Messem.** Il faut aussi noter que l'on appelle ici *intégrale fléchée* un cas de ce que Monsieur Van Messem appelle ≪ intégrale impropre ≫.

Chapitre 2

Eléments de calcul matriciel

2.1 Introduction

Les matrices et le calcul matriciel offrent une interprétation de problèmes en termes calculatoires. Par exemple, il est courant de rencontrer des systèmes d'équations linéaires (c'est-à-dire où les inconnues n'apparaissent qu'au premier degré). Imaginons par exemple que l'on doive résoudre le système (S) suivant

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2x_1 - 3x_2 + x_4 & = & 9 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 & = & 2 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 & = & -1. \end{array}\right.$$

Des résultats et techniques basés notamment sur le rang des matrices donnent des méthodes pour résoudre ce type de système par des manipulations des tableaux des données

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et du tableau des inconnues

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

En écriture matricielle, le système (S) s'écrit

$$AX = B.$$

Les représentations vectorielles et le calcul matriciel s'appliquent à de nombreux domaines de la biologie [et de la géographie]. C'est le cas, par exemple, de la dynamique de population (matrices ≪ de Leslie ≫), la biochimie (propriétés géométriques de certaines molécules), l'analyse des données statistiques et la résolution de systèmes différentiels linéaires. (Extrait de [1].)

Voir aussi le pdf en annexe, copie d'un article de Wikipedia (récupéré le 09/06/21).

2.2 Matrices : définitions générales et notations

Définition 2.2.1. *Une matrice est un tableau rectangulaire de nombres (réels ou complexes).*

Les lignes et les colonnes de ce tableau sont appelées les rangées de la matrice.

Les nombres formant le tableau sont appelés les éléments de la matrice.

La longueur des lignes de la matrice est, par définition, le nombre d'éléments des lignes ; c'est donc aussi le nombre de colonnes de la matrice. La longueur des colonnes de la matrice est, par définition, le nombre d'éléments des colonnes ; c'est donc aussi le nombre de lignes de la matrice.

Deux matrices sont dites égales lorsqu'elles ont le même nombre de lignes, le même nombre de colonnes et que leurs éléments correspondants sont égaux.

Si une matrice possède p lignes et q colonnes, on dit que c'est une matrice de type $p \times q$ ou de format $p \times q$. Par convention, le premier naturel indique toujours le nombre de lignes et le second le nombre de colonnes.

On désigne souvent une matrice par une lettre majuscule. Si A désigne une matrice, l'élément qui se trouve sur la ligne numéro k et la colonne numéro j est désigné par

$$(A)_{k,j}\,.$$

Par exemple si

$$A = \begin{pmatrix} i & -1 & 2 & \sqrt{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & -2 & \pi \\ i+1 & 1 & 2 & -4 \\ 5 & -1 & 2i & \sqrt{2} \\ 1 & -i & 0 & -i+3 \end{pmatrix},$$

cette matrice possède 4 colonnes, 5 lignes (elle est du type 5×4) ; chaque ligne a une longueur égale à 4 ; chaque colonne a une longueur égale à 5. L'élément qui se situe sur la 3ième ligne et la 2ième colonne est

$$(A)_{3,2} = 1$$

et celui qui se situe sur la 5ième ligne et 4ième colonne est

$$(A)_{5,4} = -i + 3.$$

Pour alléger les notations (surtout dans le cas des matrices dans lesquelles la longueur des lignes ou des colonnes est grande), on utilise la même lettre minuscule pour désigner tous les éléments de la matrice, mais celle-ci est indexée par deux indices indiquant le numéro de la ligne et de la colonne sur lesquelles se trouve l'élément. Par convention, le premier indice est le numéro de la ligne et le second celui de la colonne. Par exemple, une matrice de type 4×6 est notée, en toute généralité

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \end{pmatrix}.$$

Une matrice nulle est une matrice dont tous les éléments sont nuls. Quel que soit son format, une telle matrice est notée 0 :

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lorsque la matrice ne possède qu'une ligne ou qu'une colonne, on l'appelle simplement *vecteur* (ligne ou colonne bien sûr). Dans ce cas, les notations des éléments sont simplifiées. Par exemple, si X est une matrice d'une seule colonne et de n lignes, on écrit tout simplement

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

et pour $j \in \{1, \ldots, n\}$, $(X)_{j,1}$ est noté simplement X_j.

Passons au cas important suivant, celui des matrices dites « carrées ».

Définition 2.2.2. *Une matrice carrée est une matrice dont le nombre de lignes est égal à celui des colonnes. Par définition, ce nombre est la dimension de la matrice.*

Un élément diagonal d'une matrice carrée est un élément de cette matrice qui se trouve sur une ligne et une colonne de même numéro. La diagonale principale d'une matrice carrée est formée de l'ensemble des éléments diagonaux de cette matrice.

Une matrice carrée est appelée matrice diagonale si tous ses éléments non diagonaux sont nuls.

La matrice carrée diagonale de dimension n dont les élements diagonaux sont tous égaux à 1 est appelée matrice identité[1] *de dimension n. Elle est notée I ou $\mathbb{1}$.*

Voici des exemples de matrices carrées de dimension 2, 3, 4.

$$A = \begin{pmatrix} 4i & 9 \\ -1 & i+2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & i \\ i^3 & \sqrt{5} & 6 \\ \frac{3}{4} & \frac{i}{2}+1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & i \\ 1 & 2^2 & 3^2 & i^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & i^3 \\ 1 & 2^4 & 3^4 & i^4 \end{pmatrix}.$$

La diagonale principale de A est formée des élements $4i, i+2$, celle de B est formée des élements $0, \sqrt{5}, 0$, celle de C est formée des élements $1, 2^2, 3^3, i^4$ c'est-à-dire $1, 4, 27, 1$.

Voici deux exemples de matrices diagonales

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 \end{pmatrix}$$

où les a_j, $j = 1, \ldots, 5$, sont des nombres complexes.

2.3 Matrices associées

Définition 2.3.1. *Etant donné une matrice A de type $p \times q$, on lui associe trois autres matrices :*

- *la matrice conjuguée de A, notée $\overline{A}$; il s'agit de la matrice de même type que celui de A dont les éléments sont les conjugués de ceux de A :*

$$\left(\overline{A}\right)_{k,j} = \overline{(A)_{k,j}}, \quad k = 1, \ldots, p, \; j = 1, \ldots, q.$$

1. Parfois on utilise aussi le terme « matrice unité »

— *la matrice transposée de A, notée $\widetilde{A}$; il s'agit de la matrice de type $q \times p$ telle que*

$$\left(\widetilde{A}\right)_{k,j} = (A)_{j,k}, \quad k = 1, \ldots q, \ j = 1, \ldots, p.$$

Ses lignes sont donc formées des éléments des colonnes de A et ses colonnes sont formées des éléments des lignes de A.

— *la matrice adjointe de A, notée A^*; il s'agit de la matrice transposée et conjuguée de A (ou, ce qui revient au même, de la matrice conjuguée transposée de A), c'est-à-dire*

$$A^* = \widetilde{\overline{A}} = \overline{\widetilde{A}} \qquad \text{ou encore} \qquad (A^*)_{k,j} = \overline{(A)_{j,k}}, \ k = 1, \ldots, q, \ j = 1, \ldots, p.$$

Par exemple, pour la matrice de type 4×3 suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & i \\ -i & \sqrt{5} & 6 \\ \frac{3}{4} & \frac{i}{2}+1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

on a

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -i \\ i & \sqrt{5} & 6 \\ \frac{3}{4} & \frac{-i}{2}+1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & -i & \frac{3}{4} & -1 \\ -2 & \sqrt{5} & \frac{i}{2}+1 & 3 \\ i & 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

et

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & i & \frac{3}{4} & -1 \\ -2 & \sqrt{5} & \frac{-i}{2}+1 & 3 \\ -i & 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Pour la matrice identité, on a

$$\overline{I} = \widetilde{I} = I^* = I.$$

En effet, les éléments de cette matrice sont tous réels (donc $\overline{I} = I$) et sa ligne numéro k est formée des mêmes éléments, dans le même ordre, que sa colonne numéro k (donc $\widetilde{I} = I$).

2.4 Opérations entre matrices

2.4.1 Addition de deux matrices du même type

Définition 2.4.1. *Etant donné deux matrices A, B de format $p \times q$, on définit la somme de ces deux matrices, notée $A + B$, comme étant la matrice de format $p \times q$ dont les éléments sont les sommes des éléments correspondants de chacune des deux matrices. Ainsi, par définition :*

$$(A + B)_{k,j} = (A)_{k,j} + (B)_{k,j}, \quad k = 1, \ldots, p, \ j = 1, \ldots, q.$$

Par exemple, pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & i \\ 0 & -1 & 1+i & \frac{1}{2} \\ 2 & 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -i & -i \\ 1 & -1 & 2 & i \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

on a

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -i & 0 \\ 1 & -2 & 3+i & \frac{1}{2}+i \\ 3 & 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.4.2 Multiplication d'une matrice par un nombre complexe

Définition 2.4.2. *Etant donné une matrice A de format $p \times q$ et un complexe c, on définit le produit de A par c, noté cA, comme étant la matrice de format $p \times q$ dont les éléments sont égaux à c fois les éléments correspondants de A. Ainsi, par définition :*

$$(cA)_{k,j} = c(A)_{k,j}, \quad k = 1, \ldots, p, \ j = 1, \ldots, q.$$

Par exemple, pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & i \\ 0 & -1 & 1+i & \frac{1}{2} \\ 2 & 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad c = i,$$

on a

$$cA = \begin{pmatrix} i & 2i & 0 & -1 \\ 0 & -i & -1+i & \frac{i}{2} \\ 2i & 6i & -3i & 0 \end{pmatrix}.$$

2.4.3 Propriétés des deux opérations précédentes

On vérifie directement (c'est un simple calcul, basé sur les définitions précédentes et sur les propriétés de la somme et de la multiplication entre complexes) que les deux opérations précédentes vérifient les propriétés suivantes. L'importance de ces propriétés réside dans le fait que ce sont celles que doivent vérifier deux lois définies sur un ensemble de « choses » (addition de deux « choses » du même type et multiplication d'une « chose » par un nombre) pour que cet ensemble constitue un *espace vectoriel*. Nous avons déjà mis ces propriétés en évidence au cours de l'étude du calcul vectoriel.

Propriété(s) 2.4.3. *Propriétés relatives à l'addition. Pour toutes matrices A, B, C de même format, on a*

- *$(A + B) + C = A + (B + C)$ (associativité de l'addition)*
- *$0 + A = A + 0 = A$ (la matrice nulle est un neutre pour l'addition)*
- *$A + A' = 0$ où A' est la matrice de même format que A et dont les éléments sont les opposés des éléments de A (pour toute matrice A, existence d'un symétrique)*
- *$A + B = B + A$ (commutativité de l'addition).*

Propriétés liant les deux opérations. Pour toutes matrices A, B de même format et pour tous complexes c, c' on a

- *$1A = A$*
- *$c(c'A) = (cc')A$*
- *$c(A + B) = cA + cB$*
- *$(c + c')A = cA + c'A$.*

2.4.4 Produit de matrices

La définition du produit de deux matrices peut paraître artificielle. Il n'en est rien. Cette définition provient de l'étude de la représentation matricielle des opérateurs linéaires [2] dans une base et plus précisément de la représentation matricielle de la composée de deux opérateurs linéaires.

2. Pour rappel, un opérateur linéaire entre espaces vectoriels est une application qui est telle que l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images.

Cette définition permet aussi une modélisation de situations concrètes d'évolution de processus. Après traitement par des méthodes ad hoc, on obtient des réponses aux questions posées initialement (voir la section suivante pour des premiers exemples, puis plus loin pour la présentation des méthodes adéquates).

Définition 2.4.4. *Soit A une matrice de format $p \times r$ et soit B une matrice de format $r \times q$. Le produit des matrices A et B, dans l'ordre, est la matrice notée AB, de format $p \times q$ dont les éléments sont obtenus en faisant les produits « ligne par colonne » des matrices A et B (dans l'ordre), c'est-à-dire*

$$(AB)_{k,j} = \sum_{l=1}^{r} (A)_{k,l}\ (B)_{l,j}, \quad k = 1, \ldots, p,\ j = 1, \ldots, q.$$

Vu cette définition, on peut donc toujours multiplier deux matrices carrées de même dimension.

Présentons quelques exemples de produits de deux matrices.

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & -1 \\ -2 & \frac{i}{2} & -i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & i & -1 & 2 \\ \frac{1}{4} & -i & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} i & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1+i \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} -1+\frac{i}{4} & i+1-2 & -1+1 & 2+i-3 \\ 2+\frac{i}{8} & -2i+\frac{1}{2}-2i & 2+i & -4+\frac{i}{2}-3i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1+\frac{i}{4} & -1+i & 0 & -1+i \\ 2+\frac{i}{8} & \frac{1}{2}-4i & 2+i & -4-\frac{5}{2}i \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} -1-3 & 2i+2+3 & 3i+2+2i+6 \\ -1-i & 1+1+i & 1+i+2+2i \\ -i-2 & -2+1+2 & -3+1+i+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5+2i & 8+5i \\ -1-i & 2+i & 3+3i \\ -2-i & 1 & 2+i \end{pmatrix},$$

$$AC = \begin{pmatrix} i+1 & 2+i-1 & 3+i-1-2 \\ -2i+i & -4+\frac{i}{2}-i & -6+\frac{i}{2}-\frac{1}{2}-2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i+1 & 1+i & i \\ -i & -4-\frac{1}{2}i & -\frac{13}{2}-\frac{3}{2}i \end{pmatrix}.$$

2.4.5 Propriétés du produit matriciel

Deux propriétés importantes du produit matriciel sont les suivantes.

Propriété(s) 2.4.5. *1) Le produit matriciel est associatif.*

Soient A de format $n \times p$, B de format $p \times q$ et C de format $q \times r$. On a

$$(AB)C = A(BC).$$

2) Le produit matriciel n'est PAS commutatif.

Cela signifie que, même si les produits sont définis, on peut avoir $AB \neq BA$.

Preuve. 1) Les deux membres de l'égalité sont bien définis et sont des matrices de même format. De fait, vu les hypothèses sur les formats, la matrice AB est bien définie et est de format $n \times q$; la matrice C étant de format $q \times r$, le produit $(AB)C$ est bien défini et est une matrice de format $n \times r$. Regardons alors le membre de droite, à savoir $A(BC)$. Ici encore, vu les hypothèses sur les formats, la matrice BC est bien définie et est de format $p \times r$; la matrice A étant de format $n \times p$, le produit $A(BC)$ est bien défini et est une matrice de format $n \times r$.

Cela étant, montrons que les éléments des matrices $(AB)C$ et $A(BC)$ sont les mêmes. L'élément sur la ligne l ($l = 1, \ldots, n$) et la colonne k ($k = 1, \ldots, r$) de la matrice $(AB)C$ est

$$\Big((AB)C\Big)_{l,k} = \sum_{s=1}^{q} (AB)_{l,s}(C)_{s,k} = \sum_{s=1}^{q} \left(\sum_{j=1}^{p} (A)_{l,j}(B)_{j,s} \right) (C)_{s,k}.$$

Comme l'addition de nombres est une opération commutative, et comme le produit entre nombres est également une opération commutative, l'expression précédente peut être écrite en permutant les deux sommes et les produits. On a alors

$$\begin{aligned} \Big((AB)C\Big)_{l,k} &= \sum_{s=1}^{q} \left(\sum_{j=1}^{p} (A)_{l,j}(B)_{j,s} \right) (C)_{s,k} \\ &= \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{s=1}^{q} (B)_{j,s}(C)_{s,k} \right) (A)_{l,j} \\ &= \sum_{j=1}^{p} (BC)_{j,k}(A)_{l,j} \\ &= \sum_{j=1}^{p} (A)_{l,j}(BC)_{j,k} = \Big(A(BC)\Big)_{l,k} \end{aligned}$$

et on conclut.

2) Pour montrer que le produit matriciel n'est pas commutatif, il suffit de donner un exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

car l'élément de la première ligne et première colonne du produit du membre de gauche est 0 et celui du produit du membre de droite est 1. Il est bon de remarquer que tout autre exemple est aussi une justification (donc pas besoin d'étudier par coeur celui-ci !!) □

L'associativité du produit matriciel permet de définir le produit d'un nombre fini de matrices dans un ordre donné. En particulier, on peut définir les puissances entières d'une matrice carrée

$$A^m = \underbrace{A \ldots A}_{m} \ , \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

Voici quelques autres propriétés du produit matriciel.

1) *Si on travaille entre matrices carrées de même dimension, on a*

$$A0 = 0A = 0, \quad A\mathbb{1} = \mathbb{1}A = A.$$

2) Si $c \in \mathbb{C}$, A est du type $n \times p$ et B du type $p \times q$, on a

$$c(AB) = (cA)B = A(cB).$$

3) Le produit matriciel est *distributif par rapport aux combinaisons linéaires de matrices.* Cela signifie que l'on a

$$(cA + c'B)C = cAC + c'BC \quad \text{et} \quad C(cA + c'B) = cCA + c'CB$$

si les produits matriciels ont un sens et pour tous $c, c' \in \mathbb{C}$.

4) Si A est du type $n \times p$ et si B est du type $p \times q$ on a

$$\widetilde{AB} = \tilde{B}\tilde{A}\ ,\ \ \overline{AB} = \bar{A}\bar{B}\ ,\ \ (AB)^* = B^* A^*.$$

5) La propriété qui suit est tout à fait différente de son analogue entre nombres complexes : *le produit de deux matrices peut être nul sans qu'aucun facteur ne soit nul.*

Par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}^2 = 0\ ,\ \ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Preuve. Tout s'obtient directement par calcul en utilisant les définitions.□

2.5 Les matrices de Leslie et stochastiques

2.5.1 Dynamique d'une population

Ce qui suit est extrait de [5] (article de J. Bair), avec de minimes modifications de présentation à la fin (compte tenu de la place de l'exemple dans le présent syllabus) et de légères corrections dans les valeurs numériques du tableau (arrondis).

Intéressons-nous à une population de souris femelles dont on sait que chacune d'entre elles donne naissance (en moyenne) à une femelle pendant sa première année de vie et à huit femelles pendant sa deuxième année. Par ailleurs, la probabilité pour qu'une souris survive une deuxième année est de $0,25$ (25%) et il n'y a aucune chance pour qu'elle survive au-delà de la deuxième année. On distingue donc deux catégories de souris : les juvéniles, âgées de moins de un an et les adultes, dont l'âge est compris entre un et deux ans. Notons, pour tout instant t (supposé entier), j_t le nombre de souris juvéniles, a_t celui des adultes et $n_t = j_t + a_t$ le nombre total de souris dans la population étudiée. Les hypothèses du modèle se traduisent par deux équations élémentaires

$$\begin{cases} j_{t+1} &= j_t + 8a_t \\ a_{t+1} &= 0,25\, j_t. \end{cases}$$

En connaissant le nombre de souris juvéniles et adultes au temps initial $t = 0$, on peut calculer, de proche en proche, pour $t = 1, 2, 3, \ldots$ les valeurs de j_t et de a_t, puis en déduire n_t ainsi que les quotients j_t/n_t, a_t/n_t, n_{t+1}/n_t. Par exemple, pour $j_0 = 20$ et $a_0 = 0$, on trouve par récurrence les valeurs rassemblées dans le tableau ci-dessous.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
j_t	20	20	60	100	220	420	860	1700	3420	6820	13660
a_t	0	5	5	15	25	55	105	215	425	855	1705
n_t	20	25	65	115	245	475	965	1915	3845	7675	15365
j_t/n_t	1	0,8	0,92	0,87	0,90	0,88	0,89	0,89	0,89	0,89	0,89
a_t/n_t	0	0,2	0,08	0,13	0,10	0,12	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11
n_{t+1}/n_t	1,25	2,6	1,77	2,13	1,94	2,03	1,98	2,01	2	2	-

On constate que les nombres des trois dernières lignes (relatives à des quotients) semblent se stabiliser. A « long terme », il semble qu'il y aura environ huit fois plus de souris juvéniles que d'adultes[3], tandis que la population totale des souris doublera quasiment tous les ans[4]. Ces résultats peuvent être justifiés à l'aide du calcul matriciel.

En effet, le système

$$\begin{cases} j_{t+1} &= j_t + 8a_t \\ a_{t+1} &= 0,25\, j_t \end{cases}$$

peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} j_{t+1} \\ a_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_t \\ a_t \end{pmatrix}.$$

Si on définit la matrice L par

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

et les vecteurs V_t par

$$V_t = \begin{pmatrix} j_t \\ a_t \end{pmatrix},$$

on obtient que l'évolution du nombre de souris juvéniles et adultes est donnée par

$$V_{t+1} = L^t V_0$$

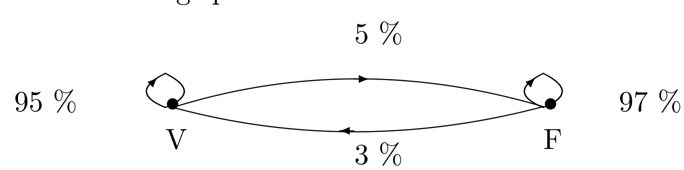
où V_0 est le vecteur colonne dont les éléments sont le nombre de souris juvéniles et adultes au temps initial. La matrice L est appelée *matrice de transition.*

On verra plus loin une méthode d'analyse de l'évolution des puissances de la matrice L.

Donnons alors un nom au type de matrice apparaissant ici. Ce sont elles qui seront étudiées plus loin. *Une matrice de Leslie est une matrice carrée dont les éléments sont positifs ou nuls. Si en outre la somme des éléments de chaque colonne vaut* 1*, alors la matrice de Leslie est dite stochastique.*

2.5.2 Migration de la population

On désire étudier des mouvements de population entre la ville et ses faubourgs. On suppose que, chaque année,
- 95% de la population de la ville y reste,
- 5% de la population de la ville part vers les faubourgs,
- 97% de la population des faubourgs y reste,
- 3% de la population des faubourgs part vers la ville.



Si on donne la population une certaine année, on demande un procédé simple de modélisation de la manière dont elle va évoluer au cours des années suivantes.

Soient V_0, F_0 respectivement les populations de la ville et des faubourgs l'année fixée au départ, V_1, F_1 respectivement les populations de la ville et des faubourgs un an après. Plus

3. Comparer les lignes j_t et a_t
4. Ligne n_{t+1}/n_t

généralement, soient V_k, F_k respectivement les populations de la ville et des faubourgs après k années. On a donc

$$V_1 = 0.95\ V_0\ +\ 0.03\ F_0, \qquad F_1 = 0.05\ V_0\ +\ 0.97\ F_0.$$

Cela peut s'écrire sous forme matricielle de la manière suivante

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \\ F_0 \end{pmatrix}.$$

Si on note

$$T = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{pmatrix},$$

la répartition de la population après deux années est

$$\begin{pmatrix} V_2 \\ F_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} V_1 \\ F_1 \end{pmatrix} = T^2 \begin{pmatrix} V_0 \\ F_0 \end{pmatrix}.$$

Comme dans l'exemple précédent, la matrice T est appelée *matrice de transition.* Plus généralement, après k années, on a

$$\begin{pmatrix} V_k \\ F_k \end{pmatrix} = T^k \begin{pmatrix} V_0 \\ F_0 \end{pmatrix}.$$

On verra plus loin une méthode d'analyse de l'évolution des puissances de la matrice de transition (stochastique) T.

2.6 Déterminants

Etant donné une matrice carrée, on lui associe un nombre complexe, appelé *déterminant de la matrice*.

La définition du déterminant d'une matrice carrée est donnée par récurrence sur la dimension de la matrice. Cela signifie que l'on donne la définition du déterminant d'une matrice quelconque de dimension 2 ; ensuite on donne la définition du déterminant d'une matrice de dimension 3, laquelle est basée sur les déterminants de matrices de dimension 2, etc.

Par souci de généralité, on donne aussi la définition du déterminant d'une matrice de dimension 1.

Si A est une matrice carrée, son déterminant est noté $detA$ ou $det(A)$ pour éviter toute confusion si la matrice dont on prend le déterminant s'écrit de façon plus complexe.

2.6.1 Définition

Si la matrice est de dimension 1, c'est-à-dire si $A = (a)$ où $a \in \mathbb{C}$, on définit le déterminant de cette matrice par

$$\boxed{\det(a) = a.}$$

Si la matrice est de dimension 2, c'est-à-dire si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

alors

$$\boxed{\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.}$$

Si la matrice est de dimension 3, c'est-à-dire si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

alors

$$\boxed{\begin{aligned} &\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ &= a_{11}\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}. \end{aligned}}$$

Appelons *cofacteur* de l'élément i, j d'une matrice carrée (c'est-à-dire de l'élément qui se trouve sur la ligne numéro i et la colonne numéro j), le déterminant du tableau carré obtenu en supprimant la ligne et la colonne qui contiennent cet élément, multiplié par $(-1)^{i+j}$. Par définition, le déterminant de A est donc la somme des produits des éléments de la première ligne par les cofacteurs correspondants :

$$\begin{aligned} &\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ &= (a_{11} \times \text{cofacteur de } a_{11}) + (a_{12} \times \text{cofacteur de } a_{12}) + (a_{13} \times \text{cofacteur de } a_{13}). \end{aligned}$$

L'expression est la même pour le déterminant d'une matrice de dimension 2, bien sur seulement avec une somme de deux termes.

Ainsi, de proche en proche sur la dimension de la matrice, on définit le déterminant pour une matrice de dimension n :

> *le déterminant de A est la somme des produits des éléments de la* **première ligne** *par les cofacteurs correspondants.*

On appelle *ordre d'un déterminant* la dimension de la matrice carrée qui sert à le définir.

Pour les déterminants, on utilise aussi souvent la notation suivante : si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

alors

$$\det A = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

De même en dimension 3 : si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

alors

$$\det A = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2.6.2 Propriétés

Une première propriété fort utile dans le calcul des déterminants est la suivante. Elle est admise ici.

Propriété(s) 2.6.1 (Première loi des mineurs)**.** *Le déterminant d'une matrice carrée est égal à la somme des produits des éléments* **d'une rangée (quelconque)** *par les cofacteurs correspondants.*

Cette propriété signifie donc que, si l'on effectue le même « développement » que celui qui a été fait dans la définition, mais en suivant une ligne quelconque ou une colonne quelconque, on trouve la même valeur. Cette propriété est très utile par exemple lorsque la matrice a des éléments nuls situés sur une même rangée.

Ainsi par exemple le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} i & \sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 2 & i+2 & 0 \\ \frac{1}{3} & -i & 0 \end{pmatrix}$$

se calcule rapidement lorsqu'on le développe selon la troisième colonne. En effet, comme deux éléments de cette colonne sont nuls, le calcul nécessite seulement le calcul d'un déterminant d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \det A &= \frac{-1}{2}\,(-1)^{1+3}\ \det \begin{pmatrix} 2 & i+2 \\ \frac{1}{3} & -i \end{pmatrix} \\ &= \frac{-1}{2}\left(-2i - \frac{i}{3} - \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{-1}{2}\,(-\frac{2}{3} - \frac{7i}{3}) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{7i}{6}. \end{aligned}$$

Voici deux autres propriétés. Nous les admettrons également.

Propriété(s) 2.6.2.

1. *Propriété de linéarité : si une colonne C (resp. une ligne L) d'une matrice carrée A est une combinaison linéaire (c'est-à-dire une somme de multiples) de vecteurs colonnes (resp. vecteurs lignes) alors le déterminant de A est égal à la somme des multiples des déterminants des matrices obtenues en remplaçant C (resp. L) par les vecteurs colonnes (resp. lignes) intervenant dans la combinaison linéaire.*
2. *Le déterminant d'une matrice change de signe lorsqu'on permute deux rangées parallèles dans la matrice.*

En conséquence de ce qui précède, les propriétés suivantes se démontrent tout de suite, comme expliqué au cours.

Propriété(s) 2.6.3.

1. *Le déterminant d'une matrice qui a deux rangées parallèles égales est nul.*
2. *Si, à une rangée d'une matrice, on ajoute une combinaison linéaire d'autres rangées parallèles, on définit une nouvelle matrice qui a le même déterminant que celui de la matrice de départ.*

Donnons quelques exemples illustratifs. Si

$$A = \begin{pmatrix} sa_{11} + rb_{11} & a_{12} \\ sa_{21} + rb_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

la première colonne de A est égale à

$$s \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}.$$

Donc, vu la première propriété, on a

$$\det A = s \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + r \det \begin{pmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Un cas très utile est celui où on ne fait que multiplier une rangée par un nombre :

$$\begin{aligned}
& r \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
= \; & \det \begin{pmatrix} ra_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ra_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ra_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & ra_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ra_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ra_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ra_{13} \\ a_{21} & a_{22} & ra_{23} \\ a_{31} & a_{32} & ra_{33} \end{pmatrix} \\
= \; & \det \begin{pmatrix} ra_{11} & ra_{12} & ra_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ra_{21} & ra_{22} & ra_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ra_{31} & ra_{32} & ra_{33} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Il faut donc bien remarquer que quand on multiplie le déterminant d'une matrice A par un nombre, on obtient le déterminant d'une matrice obtenue à partir de A en multipliant uniquement une rangée de A par le nombre (*).

On a aussi

$$\det(rA) = \det \begin{pmatrix} ra_{11} & ra_{12} & ra_{13} \\ ra_{21} & ra_{22} & ra_{23} \\ ra_{31} & ra_{32} & ra_{33} \end{pmatrix} = r^3 \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

et, si la matrice est de dimension 2

$$\det(rA) = r^2 \det A.$$

Ce résultat est à comparer et à ne pas confondre avec ce qui précède (*). Il est incorrect de dire que $r \det(A) = \det(rA)$!

Ces propriétés permettent aussi de simplifier grandement le calcul de déterminants ; elles sont spécialement utiles lorsqu'on demande une factorisation. Ainsi par exemple

$$
\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} b-a & b^2-a^2 \\ c-a & c^2-a^2 \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} b-a & (b-a)(b+a) \\ c-a & (c-a)(c+a) \end{pmatrix} \\
&= (b-a)\ (c-a)\ \det\begin{pmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{pmatrix} \\
&= (b-a)\ (c-a)\ [(c+a)-(b+a)] \\
&= (b-a)(c-a)(c-b) \\
&= (a-b)\ (b-c)\ (c-a).
\end{aligned}
$$

La propriété qui suit, jointe à la première loi des mineurs, sera d'une grande utilité dans l'étude de l'inversion des matrices carrées.

Propriété(s) 2.6.4 (Seconde loi des mineurs)**.** *La somme des produits des éléments d'une rangée d'une matrice carrée par les cofacteurs des éléments correspondants d'une rangée parallèle est nulle.*

Résultat admis.□

Illustrons cette propriété sur deux exemples. Soit la matrice

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & i & -2 \\ i+2 & \frac{1}{2} & 1 \\ 3 & 1 & \frac{i}{2} \end{pmatrix}.
$$

Calculons la somme des produits des éléments de la troisième ligne par les cofacteurs de la deuxième ligne. De même, calculons la somme des produits des éléments de la deuxième colonne par les cofacteurs des éléments de la première colonne.

Les cofacteurs des éléments de la deuxième ligne sont

$$
\begin{aligned}
\text{cofacteur de } a_{21} &= (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} i & -2 \\ 1 & \frac{i}{2} \end{vmatrix} = -\left(-\frac{1}{2}+2\right) = -\frac{3}{2} \\
\text{cofacteur de } a_{22} &= (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & \frac{i}{2} \end{vmatrix} = 6+\frac{i}{2} \\
\text{cofacteur de } a_{23} &= (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & i \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(1-3i) = -1+3i.
\end{aligned}
$$

La somme des produits des éléments de la troisième ligne par les cofacteurs correspondants de la deuxième ligne est donc

$$
\begin{aligned}
& a_{31} \times \text{cofacteur de } a_{21} + a_{32} \times \text{cofacteur de } a_{22} + a_{33} \times \text{cofacteur de } a_{23} \\
&= 3 \times \left(\frac{-3}{2}\right) + 1 \times \left(6+\frac{i}{2}\right) + \frac{i}{2} \times (-1+3i) \\
&= -\frac{9}{2} + 6 + \frac{i}{2} - \frac{i}{2} - \frac{3}{2} = 0.
\end{aligned}
$$

De même, les cofacteurs des élements de la première colonne sont

$$\begin{aligned}
\text{cofacteur de } a_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{i}{2} \end{vmatrix} = \frac{i}{4} - 1 \\
\text{cofacteur de } a_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} i & -2 \\ 1 & \frac{i}{2} \end{vmatrix} = -\left(\frac{-1}{2} + 2\right) = -\frac{3}{2} \\
\text{cofacteur de } a_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} i & -2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = i + 1.
\end{aligned}$$

La somme des produits des éléments de la deuxième colonne par les cofacteurs des élements de la première colonne est donc

$$\begin{aligned}
& a_{12} \times \text{cofacteur de } a_{11} + a_{22} \times \text{cofacteur de } a_{21} + a_{32} \times \text{cofacteur de } a_{31} \\
&= i \times \left(\frac{i}{4} - 1\right) + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) + 1 \times (i+1) \\
&= -\frac{1}{4} - i - \frac{3}{4} + i + 1 = 0.
\end{aligned}$$

Enonçons maintenant en une seule fois les deux lois des mineurs. Soit une matrice carrée A de dimension n. La matrice des cofacteurs de A, notée $\mathcal{A}$, est la matrice carrée de même dimension que A définie par $(\mathcal{A})_{k,l}$ égale le cofacteur de l'élément $(A)_{k,l}$ quels que soient $k, l = 1, \dots n$. Les deux lois des mineurs s'écrivent alors (c'est évident par définition du produit matriciel)

$$\boxed{\widetilde{\mathcal{A}}\, A \;=\; det(A)\, \mathbb{1} \;=\; A\, \widetilde{\mathcal{A}}.}$$

On montre aussi directement (par calcul) la propriété suivante concernant le déterminant d'une matrice diagonale.

Propriété(s) 2.6.5. *Si*

$$A = diag(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

alors

$$\det A = a_1 a_2 \dots a_n.$$

En particulier,

$$\det(\mathbb{1}) = 1.$$

Ce résultat s'écrit, en dimension 2 :

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2;$$

en dimension 3 :

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3;$$

en dimension 4 :

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 a_4.$$

La propriété précédente peut être généralisée au cas de matrices triangulaires inférieures (resp. supérieures), c'est-à-dire au cas de matrices dont les éléments situés au-dessus (resp. en dessous) de la diagonale principale sont tous nuls. Le déterminant d'une matrice de ce type est encore égal au produit des éléments diagonaux. Pour la dimension 3 et une matrice triangulaire supérieure, ce résultat s'écrit

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}.$$

Enfin vis-à-vis du produit de deux matrices carrées de même dimension, on a la propriété suivante.

Propriété(s) 2.6.6. *Si A, B sont deux matrices carrées de même dimension, on a*

$$\det(AB) = \det(A)\ \det(B).$$

Résultat admis. □

Attention, il importe de vérifier les hypothèses. De fait, il se peut que AB soit une matrice carrée sans que A, B le soient (si A est de type $p \times q$, la matrice AB est définie et est carrée si et seulement si B est du type $q \times p$). La propriété précédente n'est plus correcte dans ce cas.

Terminons par énoncer et démontrer partiellement un résultat extrêmement utile concernant l'annulation d'un déterminant.

Propriété(s) 2.6.7. *Soit A une matrice carrée de dimension n. Alors le déterminant de A est nul si et seulement si l'une des colonnes (resp. des lignes) est une combinaison linéaire des autres.*

Preuve. D'une part si l'une des colonnes (resp. des lignes) est une combinaison linéaire des autres, alors il est clair que le déterminant est nul, par application de la propriété de linéarité et de celle qui affirme qu'un déterminant ayant deux rangées parallèles égales est nul.

La réciproque est admise, à savoir que si le déterminant d'une matrice carrée est nul, alors une colonne (resp. une ligne) est nécessairement une combinaison linéaire des autres.□

2.7 Inversion des matrices carrées

Le nombre 1 joue le rôle de neutre dans la multiplication entre complexes : on a $1z = z1 = z$ pour tout complexe z. Dans le cas des matrices carrées de même dimension, la matrice identité joue aussi le rôle de neutre pour la multiplication entre matrices : on a $A\mathbb{1} = \mathbb{1}A = A$ pour toute matrice carrée A.

Dans le cadre de la théorie des nombres complexes, on s'est posé la question de savoir si, étant donné un complexe z, il existe un autre complexe z' tel que

$$zz' = z'z = 1.$$

La réponse est oui si z n'est pas nul. Le complexe z' qui réalise ces égalités est de plus unique et est appelé l'inverse du complexe z.

Il est naturel de se poser la même question au sein des matrices carrées de même dimension : étant donné une matrice carrée A, existe-t-il une matrice carrée A' de même dimension que A, telle que

$$AA' = \mathbb{1} \text{ et } A'A = \mathbb{1}?$$

Remarquons ici que le produit matriciel n'étant pas commutatif, le fait d'avoir $AA' = \mathbb{1}$ n'implique pas, à priori, que $A'A = \mathbb{1}$ comme c'est le cas pour les nombres complexes.

On adopte alors de façon naturelle la définition suivante.

Définition 2.7.1. *Soit A une matrice carrée de dimension n. On appelle matrice inverse de A une matrice carrée A' de dimension n qui vérifie les deux égalités suivantes*

$$AA' = \mathbb{1} = A'A.$$

Si, étant donné A, il existe une telle matrice A', on dit simplement que A admet un inverse.

Recherchons alors sous quelle(s) condition(s) une matrice admet une matrice inverse, si cette matrice inverse est unique et, si possible, quelle est sa forme explicite.

Nous obtenons immédiatement une condition nécessaire à l'existence d'une matrice inverse, comme le montre la propriété ci-dessous.

Propriété(s) 2.7.2. *Si A admet un inverse alors son déterminant est non nul.*

Preuve. Soit une matrice A' telle que $AA' = \mathbb{1}$. En prenant le déterminant, on obtient

$$\det(AA') = 1 = \det(A)\ \det(A')$$

donc $\det(A) \neq 0$. □

En fait, les lois des mineurs permettent de montrer que cette condition nécessaire à l'existence d'un inverse (à savoir $\det(A) \neq 0$) est aussi suffisante. Reprenons en effet la matrice des cofacteurs des éléments d'une matrice A, notée $\mathcal{A}$ (cf section consacrée aux déterminants). Comme expliqué précédemment, les deux lois des mineurs peuvent s'écrire

$$A\,\widetilde{\mathcal{A}} \;=\; (\det A)\ \mathbb{1} \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathcal{A}}\,A \;=\; (\det A)\ \mathbb{1}.$$

Il s'ensuit le résultat ci-dessous.

Propriété(s) 2.7.3. *Si A est une matrice carrée dont le déterminant n'est pas nul, alors la matrice*

$$A' = \frac{1}{\det A}\widetilde{\mathcal{A}}$$

vérifie

$$AA' = \mathbb{1} \quad \textit{et} \quad A'A = \mathbb{1}.$$

Et qu'en est-il de l'unicité ? Montrons que si la matrice A admet une matrice inverse (et même moins, cf résultat ci-dessous), alors cette matrice inverse est unique et est

$$\frac{1}{\det A}\widetilde{\mathcal{A}}.$$

Propriété(s) 2.7.4. *Soit A une matrice carrée.*

Si B est une matrice carrée de même dimension que A telle que

$$BA = \mathbb{1} \qquad (resp. \quad AB = \mathbb{1}),$$

alors

$$\det A \neq 0$$

et

$$B = \frac{1}{\det A}\widetilde{\mathcal{A}}.$$

Preuve. Par la propriété du déterminant du produit de deux matrices carrées de même dimension, on a

$$1 = \det \mathbb{1} = \det(BA) = \det(B)\ \det(A) \qquad (\text{resp.} \ \ 1 = \det \mathbb{1} = \det(AB) = \det(A)\ \det(B)),$$

donc le déterminant de A n'est pas nul.

Notons

$$C = \frac{1}{\det A}\widetilde{\mathcal{A}}.$$

On a

$$B = B\mathbb{1} = B(AC) = (BA)C = \mathbb{1}C = C$$

$$(\text{resp.} \quad B = \mathbb{1}B = (CA)B = C(AB) = C\mathbb{1} = C). \ \square$$

Vu le résultat d'unicité, on utilise alors la notation suivante : si A est une matrice carrée de déterminant non nul, on pose

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{\mathcal{A}}.$$

Cette matrice est appelée

l'inverse de la matrice A.

Une matrice dont le déterminant est non nul (resp. nul) est dite *non singulière* (resp. singulière) ou encore *inversible* (resp. non inversible).

Voici quelques propriétés de l'inverse d'une matrice. Elles se démontrent directement.

Propriété(s) 2.7.5. *a) Les matrices $A, \bar{A}, \tilde{A}$ et A^* sont simultanément inversibles et on a*

$$(\bar{A})^{-1} = \overline{A^{-1}},\ (\tilde{A})^{-1} = \widetilde{A^{-1}},\ (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

b) Si λ est un nombre complexe non nul et A est inversible alors λA est inversible et

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\, A^{-1}.$$

c) Si A et B sont inversibles et de même dimension, alors AB est inversible et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

d) Une matrice diagonale est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont non nuls. De plus

$$diag(a_1, \ldots, a_n)^{-1} = diag\left(\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}\right).$$

En particulier, $\mathbb{1}^{-1} = \mathbb{1}$.

e) L'inverse d'une matrice est toujours inversible. On a

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \qquad \textit{et} \qquad (A^{-1})^{-1} = A.$$

f) Si $AB = AC$ *(ou* $BA = CA$*) et si* A *est inversible, alors* $B = C$.

Preuve. Tout se démontre directement en repassant à la définition. Prenons quelques cas.

a) Les déterminants de ces matrices sont simultanément nuls. Les inverses proposés conviennent. Par exemple, dans le cas de la matrice transposée, on a

$$\tilde{A}^{-1}\tilde{A} = \widetilde{AA^{-1}} = \mathbb{1}.$$

c) De fait, $(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}\mathbb{1}B = \mathbb{1}$.

e) En effet, $\det(A^{-1}A) = \det(A^{-1})\det(A) = \det \mathbb{1} = 1$; de plus, $AA^{-1} = \mathbb{1}$ donne $(A^{-1})^{-1} = A$.

f) Cela revient en effet à multiplier à gauche (ou à droite) la relation de départ par A^{-1}. □

2.8 Systèmes d'équations linéaires

2.8.1 Cas des systèmes carrés

Lorsque la matrice A du système d'équations

$$AX = B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

est carrée et inversible, le système admet une solution unique donnée par

$$X = A^{-1}B.$$

Si la dimension de la matrice est n, on trouve rapidement la valeur des inconnues : quel que soit $j = 1, \ldots, n$, on a

$$x_j = \frac{det(A^{(j)})}{det(A)}$$

où $A^{(j)}$ est la matrice dont la colonne numéro j est le vecteur des termes indépendants B et dont les autres colonnes sont celles de A. Il est aisé de se convaincre de cela car il suffit de se rappeler la forme de l'inverse, à savoir la matrice $\mathcal{A}$ des cofacteurs de A transposée divisée par le déterminant de A. On a en effet

$$\begin{aligned}
x_j &= \left(A^{-1}B\right)_j \\
&= \frac{1}{\det(A)}\left(\widetilde{\mathcal{A}}B\right)_j \\
&= \frac{1}{\det(A)}\sum_{k=1}^{n}\left(\widetilde{\mathcal{A}}\right)_{j,k} b_k \\
&= \frac{1}{\det(A)}\sum_{k=1}^{n}(\mathcal{A})_{k,j}\, b_k.
\end{aligned}$$

En se rappelant que la matrice $A^{(j)}$ est la matrice dont la colonne numéro j est le vecteur des termes indépendants B et dont les autres colonnes sont celles de A, son déterminant, calculé à partir de la colonne j (application de la première loi des mineurs), est

$$\sum_{k=1}^{n} (\mathcal{A})_{k,j}\, b_k.$$

On trouve donc finalement

$$x_j \;=\; \frac{\det(A^{(j)})}{\det(A)}.$$

Dans le cas où la matrice n'est pas inversible, le système est soit incompatible, soit équivalent à un système constitué de moins d'équations. La théorie générale sort du cadre de ce cours. Seuls des exemples seront utilisés, principalement dans le cadre de la recherche de vecteurs propres (cf une section de la suite de ce chapitre).

2.8.2 Cas des systèmes non carrés

Des méthodes standards de résolution doivent normalement être déjà être connues et interviennent dans divers exercices. La théorie générale n'est pas difficile mais, faute de temps, il n'est pas possible d'en donner les argumentations théoriques dans le cadre de ce cours.

2.9 Vecteurs propres, valeurs propres, diagonalisation

Ces notions (vecteurs et valeurs propres, diagonalisation) ne s'étudient que dans le cadre de matrices carrées.

2.9.1 Manipulations de matrices-vecteurs

Sont présentées ici quelques manipulations de calcul matriciel qui seront bien utiles dans la suite pour une meilleure et plus rapide compréhension des développements.

Soit une matrice carrée A de dimension n dont les colonnes sont notées $C_1, \ldots, C_n$ et soit un vecteur colonne X de n éléments. La matrice AX est de format $n \times 1$, c'est donc un vecteur colonne avec n éléments. Etant donné la définition du produit matriciel (« ligne par colonne »), le $j$ème élément de AX est donc obtenu en faisant la somme des produits des éléments de la ligne j de A par les éléments de X. Comme les éléments de la ligne j de A sont les éléments j de ses colonnes, pour obtenir AX, on fait donc la combinaison linéaire des colonnes de A avec les éléments de X comme coefficients. Autrement dit, on a

$$AX \;=\; \sum_{k=1}^{n} x_k\, C_k.$$

Autre formulation : si

$$A \;=\; \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

et

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

l'élément j du vecteur AX est

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, x_k;$$

le vecteur AX est donc

$$AX = \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$AX = \sum_{k=1}^{n} x_k\, C_k.$$

2.9.2 Définitions et premières propriétés

Dans de nombreuses situations (axes principaux d'inertie en mécanique du solide, matrices de dispersion en statistique, réduction de systèmes d'équations différentielles pour les molécules vibrantes, ...), on rencontre le problème suivant : étant donné une matrice carrée A, déterminer les complexes λ et les vecteurs non nuls X tels que

$$AX = \lambda X.$$

Définition 2.9.1. *Un complexe λ pour lequel il existe un vecteur non nul X tel que $AX = \lambda X$ s'appelle* une valeur propre de A. *L'ensemble des valeurs propres de A est appelé le spectre de A.*

Un vecteur non nul X vérifiant $AX = \lambda X$ est appelé vecteur propre de A de valeur propre λ.

Il est important de noter qu'il est indispensable de spécifier ci-dessus « vecteur non nul » car il est clair que la relation $AX = \lambda X$ est vérifiée pour $X = 0$ et n'importe quel complexe λ.

Si A est une matrice carrée, un simple calcul de déterminant (appliquer la définition !) montre que la fonction

$$\lambda \mapsto \det(A - \lambda \mathbb{1})$$

est un polynôme en la variable λ de degré n si A est de dimension n, dont le coefficient de λ^n est $(-1)^n$ et dont le terme indépendant est $\det(A)$.

Cela étant, voici une propriété extrêmement utile pour la recherche des valeurs propres. Comme il s'agit en fait d'un résultat faisant intervenir une notion d'équivalence (ici « si et seulement si »), ce résultat donne une alternative pour une autre définition de la notion de valeur propre.

Théorème 2.9.2. *Les valeurs propres de A sont les zéros du polynôme*

$$\lambda \mapsto P(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{1}).$$

Ce polynôme est appelé polynôme caractéristique de A *et l'équation* $P(\lambda) = 0$ *est appelée* équation caractéristique de A*.*

Preuve. Si λ_0 est une valeur propre de la matrice A, il existe un vecteur colonne non nul X_0 tel que

$$AX_0 = \lambda_0 X_0$$

ou encore

$$(A - \lambda_0\mathbb{1})X_0 = 0.$$

Si le déterminant de $A - \lambda_0\mathbb{1}$ était non nul, on aurait, en appliquant l'inverse de la matrice $A - \lambda_0\mathbb{1}$ aux deux membres de l'égalité

$$0 = (A - \lambda_0\mathbb{1})^{-1}(A - \lambda_0\mathbb{1})X_0 = X_0,$$

ce qui est contradictoire. On a donc obtenu que le complexe λ_0 est effectivement un zéro du polynôme $\lambda \mapsto P(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{1})$.

Démontrons à présent que si le complexe λ_0 vérifie $\det(A - \lambda_0\mathbb{1}) = 0$ alors c'est une valeur propre de A. Notons $C_1, \ldots C_n$ les colonnes de A. Etant donné l'annulation du déterminant de la matrice $A - \lambda_0\mathbb{1}$, l'une des colonnes de cette dernière est combinaison linéaire des autres : il existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ et des complexes c_j $(j \in \{1, \ldots, n\} \setminus k)$ tels que

$$C_k - \lambda_0 E_k \;=\; \sum_{j=1,\ j\neq k}^{n} c_j\,(C_j - \lambda_0 E_j)$$

où E_l est le vecteur colonne dont tous les éléments sont nuls sauf le numéro l, qui vaut 1. Cette relation peut encore s'écrire

$$C_k - \sum_{j=1,\ j\neq k}^{n} c_j C_j \;=\; \lambda_0 E_k - \lambda_0 \sum_{j=1,\ j\neq k}^{n} c_j E_j \;=\; \lambda_0 \begin{pmatrix} -c_1 \\ \vdots \\ -c_{k-1} \\ 1 \\ -c_{k+1} \\ \vdots \\ -c_n \end{pmatrix}.$$

En définissant le vecteur non nul X par

$$X \;=\; \begin{pmatrix} -c_1 \\ \vdots \\ -c_{k-1} \\ 1 \\ -c_{k+1} \\ \vdots \\ -c_n \end{pmatrix},$$

on obtient finalement

$$AX \;=\; \lambda_0 X$$

avec $X \neq 0$ et on conclut. $\square$

Rappelons le théorème fondamental de l'algèbre : un polynôme à coefficients et variable complexes de degré n possède exactement n zéros, comptés avec leur multiplicité. Une matrice carrée de dimension n possède donc toujours exactement n valeurs propres, comptées avec leur multiplicité.

Notons que si A est une matrice diagonale, ou même une matrice triangulaire inférieure ou supérieure, le résultat précédent peut être précisé, comme le montre la propriété ci-dessous.

Propriété(s) 2.9.3. *Si les éléments de la matrice carrée A sous (ou au-dessus de) la diagonale sont tous nuls, alors les valeurs propres de cette matrice sont les éléments diagonaux.*

Preuve. C'est immédiat en utilisant le fait que les valeurs propres d'une matrice carrée sont les zéros du polynôme caractéristique de cette matrice. En effet, le calcul du déterminant de $A - \lambda \mathbb{1}$ est direct en utilisant la définition, vu la présence de nombreux zéros : si les $a_k,\ k = 1, \ldots n$ désignent les éléments diagonaux de A de dimension n, on a

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) \; = \; (a_1 - \lambda) \ldots (a_n - \lambda).$$

$\square$

Terminons cette partie par des propriétés des vecteurs propres relatifs à une même valeur propre, puis à des valeurs propres différentes.

Propriété(s) 2.9.4. *Si les vecteurs $X_1, X_2, \ldots, X_J$ sont des vecteurs propres relatifs à la même valeur propre λ_0 de la matrice A, alors, pour tous complexes $c_1, \ldots, c_J$, le vecteur*

$$X = c_1 X_1 + \ldots + c_J X_J = \sum_{j=1}^{J} c_j X_j,$$

s'il n'est pas nul, est aussi un vecteur propre de A relatif à la valeur propre λ_0.

Preuve. Vu les propriétés du produit matriciel, on a

$$AX = A(c_1 X_1 + \ldots + c_J X_J) = c_1\ AX_1\ +\ \ldots +\ c_J\ AX_J;$$

comme les vecteurs X_j $(j = 1, \ldots, J)$ sont tous des vecteurs propres relatifs à la valeur propre λ_0, on a

$$AX_j = \lambda_0 X_j \quad \text{pour tout } \ j = 1, \ldots, J.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} AX &= c_1\ AX_1\ +\ \ldots +\ c_J\ AX_J \\ &= c_1 \lambda_0\ X_1\ +\ \ldots +\ c_J \lambda_0\ X_J \\ &= \lambda_0\ (c_1 X_1 + \ldots + c_J X_J) \\ &= \lambda_0 X. \end{aligned}$$

$\square$

Propriété(s) 2.9.5. *Si les n valeurs propres d'une matrice de dimension n sont toutes différentes, alors, quels que soient les vecteurs propres $X_1, \ldots, X_n$ relatifs à ces valeurs propres distinctes, la matrice dont les colonnes sont ces vecteurs est une matrice inversible (c'est-à-dire une matrice dont le déterminant n'est pas nul).*

Preuve. Procédons par récurrence sur $n \geq 2$. On utilise la propriété qui affirme que le déterminant d'une matrice est nul si et seulement si l'une des colonnes de la matrice est combinaison linéaire des autres.

Soient λ_1, λ_2 les valeurs propres distinctes de A et X_1, X_2 des vecteurs propres associés. Si $\det(X_1, X_2) = 0$, alors par exemple $X_1 = rX_2$, avec $r \in \mathbb{C}_0$. On obtient alors

$$AX_1 \;=\; \lambda_1 X_1 \;=\; A(rX_2) \;=\; r\lambda_2 X_2 \;=\; \lambda_2 X_1,$$

ce qui implique $(\lambda_1 - \lambda_2)X_1 = 0$, ce qui est absurde puisque $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et $X_1 \neq 0$.

Supposons alors que la propriété soit vraie en dimension n et démontrons-la en dimension $n+1$. Notons encore λ_k et X_k $(k = 1, \ldots, n+1)$ respectivement les valeurs propres distinctes de A et des vecteurs propres associés. Si le déterminant formé par ces colonnes est nul, alors il existe $k \in \{1, \ldots, n+1\}$ et des complexes r_j $(j = 1, \ldots, n+1,\ j \neq k)$ tels que

$$X_k \;=\; \sum_{j=1, j\neq k}^{n+1} r_j X_j;$$

comme X_k n'est pas nul, l'un des r_j au moins est non nul. On obtient alors, en appliquant la matrice $A - \lambda_k \mathbb{1}$ aux deux membres de l'égalité précédente,

$$(A - \lambda_k \mathbb{1})X_k \;=\; 0 \;=\; \sum_{j=1, j\neq k}^{n+1} r_j (A - \lambda_k \mathbb{1}) X_j \;=\; \sum_{j=1, j\neq k}^{n+1} r_j (\lambda_j - \lambda_k) X_j.$$

Cela étant, comme $\lambda_j - \lambda_k \neq 0$ quel que soit $j \neq k$ et comme l'un des r_j n'est pas nul, on en déduit que l'un des n vecteurs X_j $(j \in \{1, \ldots, n+1\} \setminus \{k\})$ est combinaison linéaire des $n-1$ autres. Le déterminant formé par ces vecteurs est donc nul, ce qui contredit l'hypothèse de récurrence. □

2.9.3 Exemples

1) Les valeurs propres de la matrice A

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sont 1 et -1.

En effet, le polynôme caractéristique de A est

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)\ (\lambda + 1).$$

Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre 1. On doit trouver les vecteurs

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

non nuls tels que

$$(A - 1\mathbb{1})X = (A - \mathbb{1})X = 0;$$

comme

$$(A - \mathbb{1})X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -x + y \\ x - y \end{pmatrix},$$

on a

$$(A - \mathbb{1})X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont les vecteurs

$$X = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre -1. On doit trouver les vecteurs

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

non nuls tels que

$$(A - (-1)\mathbb{1})X = (A + \mathbb{1})X = 0;$$

comme

$$(A + \mathbb{1})X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix},$$

on a

$$(A + \mathbb{1})X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre -1 sont les vecteurs

$$X = c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

2) Les valeurs propres de la matrice A

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sont i et $-i$.

En effet, le polynôme caractéristique de A est

$$\det(A - \lambda\mathbb{1}) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = \lambda^2 - i^2 = (\lambda - i)\ (\lambda + i).$$

Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre i. On doit trouver les vecteurs

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

non nuls tels que

$$(A - i\mathbb{1})X = 0;$$

comme

$$(A - i\mathbb{1})X = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -ix - y \\ x - iy \end{pmatrix},$$

on a

$$(A - i\mathbb{1})X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - iy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X = y\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre i sont les vecteurs

$$X = c\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre $-i$. On doit trouver les vecteurs

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

non nuls tels que

$$(A - (-i)\mathbb{1})X = (A + i\mathbb{1})X = 0;$$

comme

$$(A+i\mathbb{1})X = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} ix-y \\ x+iy \end{pmatrix},$$

on a

$$(A+i\mathbb{1})X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x+iy=0 \quad \Leftrightarrow \quad X = y\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre $-i$ sont les vecteurs

$$X = c\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

3) Les valeurs propres de la matrice A

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont $0, 0$, c'est-à-dire que cette matrice possède la valeur propre double 0.

En effet, le polynôme caractéristique de A est

$$\det(A-\lambda\mathbb{1}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2.$$

Cherchons les vecteurs propres associés à cette valeur propre. On doit trouver les vecteurs

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

non nuls tels que

$$(A-0\mathbb{1})X = AX = 0;$$

comme

$$AX = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix},$$

on a

$$AX = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0.$$

L'ensemble des vecteurs propres recherchés est l'ensemble des vecteurs qui s'écrivent

$$X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{C}_0.$$

4) Les valeurs propres de la matrice A

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont $0, 0, 1$, c'est-à-dire que cette matrice possède la valeur propre double 0 et la valeur propre simple 1.

En effet, le polynôme caractéristique de A est

$$\det(A-\lambda\mathbb{1}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(1-\lambda).$$

Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre 0. On doit trouver les vecteurs

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

non nuls tels que

$$(A - 0\mathbb{1})X = AX = 0;$$

comme

$$AX = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix},$$

on a

$$AX = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre 0 sont les vecteurs

$$X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x, z \in \mathbb{C}, \text{ non simultanément nuls.}$$

Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre 1. On doit trouver les vecteurs

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

non nuls tels que

$$(A - 1\mathbb{1})X = (A - \mathbb{1})X = 0;$$

comme

$$(A - \mathbb{1})X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -x + y \\ 0 \\ -z \end{pmatrix},$$

on a

$$(A - \mathbb{1})X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont les vecteurs

$$X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{C}_0.$$

5) Les valeurs propres de la matrice A

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont $1, 1, 1$, c'est-à-dire que cette matrice possède la valeur propre triple 1.

En effet, le polynôme caractéristique de A est

$$\det(A - \lambda\mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3.$$

Cherchons les vecteurs propres associés à cette valeur propre 1. On doit trouver les vecteurs

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

non nuls tels que

$$(A - 1\mathbb{1})X = (A - \mathbb{1})X = 0;$$

comme

$$(A-\mathbb{1})X=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}y\\0\\0\end{pmatrix},$$

on a

$$(A-\mathbb{1})X=0\quad\Leftrightarrow\quad y=0\quad\Leftrightarrow\quad X=\begin{pmatrix}x\\0\\z\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont les vecteurs

$$X=x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad x,z\in\mathbb{C}\quad\text{non simultanément nuls.}$$

6) Les valeurs propres de la matrice A

$$\begin{pmatrix}7&-4&8\\-2&3&-2\\-5&4&-6\end{pmatrix}$$

sont $-1,2,3$.

En effet, le polynôme caractéristique de A est

$$\det(A-\lambda\mathbb{1})=\begin{vmatrix}7-\lambda&-4&8\\-2&3-\lambda&-2\\-5&4&-6-\lambda\end{vmatrix}.$$

La valeur de ce déterminant ne change pas si on remplace la première colonne par la somme de la première colonne et de l'opposé de la troisième ; on a donc

$$\det(A-\lambda\mathbb{1})=\begin{vmatrix}-1-\lambda&-4&8\\0&3-\lambda&-2\\1+\lambda&4&-6-\lambda\end{vmatrix};$$

on effectue alors une mise en évidence (du facteur $1+\lambda$) puis on remplace la troisième ligne par la somme de la première et de la troisième : on obtient

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda\mathbb{1})&=(1+\lambda)\begin{vmatrix}-1&-4&8\\0&3-\lambda&-2\\1&4&-6-\lambda\end{vmatrix}\\&=(1+\lambda)\begin{vmatrix}-1&-4&8\\0&3-\lambda&-2\\0&0&2-\lambda\end{vmatrix}\\&=-(1+\lambda)\,(2-\lambda)\,(3-\lambda).\end{aligned}$$

Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre -1. On doit trouver les vecteurs

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

non nuls tels que

$$(A-(-1)\mathbb{1})X=(A+\mathbb{1})X=0;$$

comme

$$(A+\mathbb{1})X=\begin{pmatrix}8&-4&8\\-2&4&-2\\-5&4&-5\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}8x-4y+8z\\-2x+4y-2z\\-5x+4y-5z\end{pmatrix},$$

on a (on fait disparaître facilement le terme en y)

$$(A+\mathbb{1})X=0\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}6x+6z=0\\3x+3z=0\\2x-y+2z=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x+z=0\\y=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad X=\begin{pmatrix}x\\0\\-x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre -1 sont les vecteurs

$$X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{C}_0.$$

Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre 2. On doit trouver les vecteurs

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

non nuls tels que

$$(A - 2\mathbb{1})X = 0;$$

comme

$$(A - 2\mathbb{1})X = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & -2 \\ -5 & 4 & -8 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5x - 4y + 8z \\ -2x + y - 2z \\ -5x + 4y - 8z \end{pmatrix},$$

on a (les première et troisième équations sont les mêmes)

$$(A - 2\mathbb{1})X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 5x - 4y + 8z = 0 \\ -2x + y - 2z = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} -3x = 0 \\ -2x + y - 2z = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 2z \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad X = z \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre 2 sont les vecteurs

$$X = z \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{C}_0.$$

Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre 3. On doit trouver les vecteurs

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

non nuls tels que

$$(A - 3\mathbb{1})X = 0;$$

comme

$$(A - 3\mathbb{1})X = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 8 \\ -2 & 0 & -2 \\ -5 & 4 & -9 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4x - 4y + 8z \\ -2x - 2z \\ -5x + 4y - 9z \end{pmatrix},$$

on a (on fait disparaître le terme en y)

$$(A - 3\mathbb{1})X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 4x - 4y + 8z = 0 \\ -2x - 2z = 0 \\ -x - z = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x - y + 2z = 0 \\ x = -z \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} y = z \\ x = -z \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad X = z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre 3 sont les vecteurs

$$X = z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{C}_0.$$

7) Les valeurs propres de la matrice de Leslie vue précédemment, à savoir la matrice

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

sont 2 et -1.

En effet, le polynôme caractéristique de L est

$$\det(L-\lambda\mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 8 \\ 1/4 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda)-2 = \lambda^2-\lambda-2 = (\lambda-2)(\lambda+1).$$

Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre 2. On doit trouver les vecteurs

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

non nuls tels que

$$(L-2\mathbb{1})X = 0;$$

comme

$$(L-2\mathbb{1})X = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1/4 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -x+8y \\ x/4-2y \end{pmatrix},$$

on a

$$(L-2\mathbb{1})X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 8y \quad \Leftrightarrow \quad X = x\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre 2 sont les vecteurs

$$X = c\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre -1. On doit trouver les vecteurs

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

non nuls tels que

$$(L-(-1)\mathbb{1})X = (L+\mathbb{1})X = 0;$$

comme

$$(L+\mathbb{1})X = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2x+8y \\ x/4+y \end{pmatrix},$$

on a

$$(L+\mathbb{1})X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -4y \quad \Leftrightarrow \quad X = y\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre -1 sont les vecteurs

$$X = c\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

8) Les valeurs propres de la matrice stochastique vue précédemment, à savoir la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,03 \\ 0,05 & 0,97 \end{pmatrix}$$

sont 1 et $0,92$.

Simplifions les calculs en posant $a = 0,95$, $b = 0,03$. On a alors

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$$

donc

$$\det(T-\lambda\mathbb{1}) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ 1-a & 1-b-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-(a+1-b)\lambda+a(1-b)-b(1-a) = \lambda^2-(a-b+1)\lambda+a-b.$$

Cela étant, le réalisant (discriminant) du polynôme $\lambda \mapsto \lambda^2-(a-b+1)\lambda+a-b$ est égal à

$$(a-b+1)^2-4(a-b) \;=\; (a-b)^2+2(a-b)-4(a-b)+1 \;=\; (a-b)^2-2(a-b)+1 \;=\; (a-b-1)^2.$$

Comme $a-b-1$ est négatif, on obtient finalement que les valeurs propres cherchées sont les réels

$$\frac{a-b+1\ +\ (1+b-a)}{2}\ =\ 1\quad \text{et}\quad \frac{a-b+1\ -\ (1+b-a)}{2}\ =\ a-b\ =\ 0,92.$$

Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre 1. On doit trouver les vecteurs

$$X=\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$$

non nuls tels que

$$(T-\mathbb{1})X=0;$$

comme

$$(T-\mathbb{1})X=\begin{pmatrix} a-1 & b\\ 1-a & -b\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} (a-1)x+by\\ (1-a)x-by\end{pmatrix},$$

on a

$$(T-\mathbb{1})X=0\quad\Leftrightarrow\quad (1-a)x=by\quad\Leftrightarrow\quad X=x\begin{pmatrix} 1\\ (1-a)/b\end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont les vecteurs

$$X=c\begin{pmatrix} b\\ 1-a\end{pmatrix}\ =\ c\begin{pmatrix} 0,03\\ 0,05\end{pmatrix},\quad c\in\mathbb{C}_0.$$

Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre $0,92=a-b$. On doit trouver les vecteurs

$$X=\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$$

non nuls tels que

$$(T-(a-b)\mathbb{1})X=0;$$

comme

$$(T-(a-b)\mathbb{1})X=\begin{pmatrix} b & b\\ 1-a & 1-a\end{pmatrix}X,$$

on a

$$(T-(a-b)\mathbb{1})X=0\quad\Leftrightarrow\quad x=-y\quad\Leftrightarrow\quad X=x\begin{pmatrix} -1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre $a-b=0,92$ sont les vecteurs

$$X=c\begin{pmatrix} -1\\ 1\end{pmatrix},\quad c\in\mathbb{C}_0.$$

2.9.4 Retour aux matrices de Leslie et stochastiques

Maintenant que l'on sait ce que sont valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice carrée, on revient au traitement des problèmes posés précédemment, modélisés par des matrices de Leslie ou stochastiques.

Théorème 2.9.6 (Perron-Frobenius en dimension 2)**.** *Soit L une matrice carrée de Leslie régulière (c'est-à-dire qu'il existe une puissance de cette matrice dont tous les éléments sont strictement positifs) de dimension 2. Alors il existe une valeur propre λ^*, simple, strictement positive et strictement plus grande que le module de l'autre valeur propre et un vecteur propre X^* relatif à cette valeur propre λ^* dont les éléments sont strictement positifs.*

De plus, si X est un vecteur colonne dont les éléments sont réels et de même signe si aucun n'est nul, alors

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\sum_{j=1}^{2}(L^{k+1}X)_j}{\sum_{j=1}^{2}(L^kX)_j}\ =\ \lambda^*,$$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{(L^{k+1}X)_j}{(L^kX)_j} = \lambda^* \quad \forall j = 1, 2$$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{L^kX}{\sum_{j=1}^2 (L^kX)_j} = \frac{1}{\sum_{j=1}^2 (X^*)_j} X^*.$$

Preuve. On suppose que la matrice elle-même a ses éléments strictement positifs. Le cas général est admis ici.

Soit L la matrice

$$L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

avec a, b, c, d réels strictement positifs. On a

$$\det(L - \lambda\mathbb{1}) = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc$$

et le réalisant (discriminant) Δ de ce polynôme du second degré en la variable λ est égal à

$$(a+d)^2 - 4(ad-bc) = a^2 + d^2 + 2ad - 4ad + 4bc = a^2 + d^2 - 2ad + 4bc = (a-d)^2 + 4bc,$$

qui est un réel strictement positif vu les hypothèses sur a, b, c, d. Les valeurs propres de la matrice L, zéros du polynôme $\lambda \mapsto \det(L - \lambda\mathbb{1})$, sont donc réelles et distinctes dans le cas présent et elles sont égales à

$$\frac{a+d+\sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{a+d-\sqrt{\Delta}}{2}.$$

Posons

$$\lambda^* = \frac{a+d+\sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_* = \frac{a+d-\sqrt{\Delta}}{2}.$$

Puisque a et d sont strictement positifs, on a $\lambda^* > 0$; montrons alors que

$$|\lambda_*| < \lambda^*.$$

Si $a + d - \sqrt{\Delta}$ est positif, c'est clair puisque

$$|\lambda_*| = \left|\frac{a+d-\sqrt{\Delta}}{2}\right| = \frac{a+d-\sqrt{\Delta}}{2} < \frac{a+d+\sqrt{\Delta}}{2} = \lambda^*;$$

si $a + d - \sqrt{\Delta}$ est négatif, on a

$$|\lambda_*| = \left|\frac{a+d-\sqrt{\Delta}}{2}\right| = -\frac{a+d-\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-a-d+\sqrt{\Delta}}{2} < \frac{a+d+\sqrt{\Delta}}{2} = \lambda^*$$

puisque $a + d > 0$.

Passons aux vecteurs propres. Un calcul direct de recherche de vecteurs propres associés à la valeur propre λ conduit tout de suite au fait que ceux-ci sont les vecteurs

$$X = r \begin{pmatrix} b \\ \lambda - a \end{pmatrix}$$

avec r complexe non nul ou encore

$$X = s \begin{pmatrix} \lambda - d \\ c \end{pmatrix}$$

avec s complexe non nul[5].

Examinons alors le signe de $\lambda^* - a$ et de $\lambda_* - a$. Un calcul analogue peut aisément être fait pour[6] $\lambda^* - d$ et $\lambda_* - d$. Puisque $\Delta = (a-d)^2 + 4bc$, on a

$$\lambda^* - a \;=\; \frac{a+d+\sqrt{\Delta}-2a}{2} \;=\; \frac{-a+d+\sqrt{\Delta}}{2} \;=\; \frac{-a+d+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2}$$

et

$$\begin{aligned} \lambda_* - a \;=\; \frac{a+d-\sqrt{\Delta}-2a}{2} \;&=\; \frac{-a+d-\sqrt{\Delta}}{2} \\ &=\; \frac{-a+d-\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2} \\ &=\; -\frac{a-d+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2}. \end{aligned}$$

Comme

$$\sqrt{(a-d)^2+4bc} \;>\; |a-d|,$$

le numérateur de la fraction égale à $\lambda^* - a$ et celui de la fraction dont l'opposé est égal à $\lambda_* - a$ sont strictement positifs ; les dénominateurs étant positifs (égaux à 2), on obtient

$$\lambda^* - a > 0 \quad \text{et} \quad \lambda_* - a < 0.$$

Il s'ensuit que si r est un réel strictement positif, le vecteur

$$X^* \;=\; r\begin{pmatrix} b \\ \lambda^* - a \end{pmatrix}$$

a des éléments strictement positifs et quel que soit le réel r non nul, le vecteur

$$X_* \;=\; r\begin{pmatrix} b \\ \lambda_* - a \end{pmatrix}$$

a des éléments de signes opposés.

Examinons alors la seconde partie de l'énoncé, à savoir celle qui fait intervenir une condition initiale X et des limites.

Soit donc un vecteur X non nul, à éléments réels qui sont de même signe si aucun n'est nul. Considérons aussi les vecteurs propres X^* et X_* avec $r = 1$; on a donc

$$X^* \;=\; \begin{pmatrix} b \\ \lambda^* - a \end{pmatrix}, \quad X_* \;=\; \begin{pmatrix} b \\ \lambda_* - a \end{pmatrix}.$$

Pour alléger les notations dans ce qui suit, on pose

$$u = \lambda^* - a \quad \text{et} \quad v = \lambda_* - a.$$

5. Comme $\det(L - \lambda\mathbb{1}) = 0 = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc$, on a $bc = (a-\lambda)(d-\lambda)$ donc

$$\begin{pmatrix} b \\ \lambda - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda-a)(\lambda-d)/c \\ \lambda - a \end{pmatrix} = \frac{\lambda - a}{c}\begin{pmatrix} \lambda - d \\ c \end{pmatrix}.$$

6. On peut aussi remarquer que comme $\det(L - \lambda\mathbb{1}) = 0 = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc$, on a $0 < bc = (a-\lambda)(d-\lambda)$, donc $a - \lambda$ et $d - \lambda$ ont le même signe.

Cela étant, comme les vecteurs X^* et X_* ne sont pas multiples l'un de l'autre (ce sont des vecteurs propres de valeurs propres distinctes), ils forment une base de $\mathbb{R}^2$; il existe donc des nombres α, β tels que $X = \alpha X^* + \beta X_*$ et, vu les hypothèses sur X, on a nécessairement $\alpha \neq 0$. En effet, si $\alpha = 0$, les éléments du vecteur non nul X seraient ceux du vecteur βX_* ; mais les éléments de X_* , à savoir b et $\lambda_* - a$, sont de signes opposés et dès lors ceux de βX_* le seraient également.

Pour tout naturel k, on a alors

$$L^k X \;=\; \alpha L^k X^* + \beta L^k X_* \;=\; \alpha {\lambda^*}^k X^* + \beta {\lambda_*}^k X_*,$$

qui est un vecteur dont les éléments sont

$$\alpha {\lambda^*}^k b + \beta {\lambda_*}^k b \quad \text{et} \quad \alpha {\lambda^*}^k u + \beta {\lambda_*}^k v.$$

On va alors obtenir directement les limites annoncées dans l'énoncé.

De fait en mettant ${\lambda^*}^{k+1}$ en évidence au numérateur et ${\lambda^*}^k$ en évidence au dénominateur, on a

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha {\lambda^*}^{k+1} b + \beta {\lambda_*}^{k+1} b + \alpha {\lambda^*}^{k+1} u + \beta {\lambda_*}^{k+1} v}{\alpha {\lambda^*}^k b + \beta {\lambda_*}^k b + \alpha {\lambda^*}^k u + \beta {\lambda_*}^k v} \\
&\quad = \; \lambda^* \, \frac{\alpha b + \beta (\lambda_*/\lambda^*)^{k+1} b + \alpha \; u + \beta (\lambda_*/\lambda^*)^{k+1} v}{\alpha b + \beta (\lambda_*/\lambda^*)^k b + \alpha \; u + \beta (\lambda_*/\lambda^*)^k v} \\
&\quad = \; \lambda^* \, \frac{\alpha (b+u) + \beta (\lambda_*/\lambda^*)^{k+1} b + \beta (\lambda_*/\lambda^*)^{k+1} v}{\alpha (b+u) + \beta (\lambda_*/\lambda^*)^k b + \beta (\lambda_*/\lambda^*)^k v}.
\end{aligned}$$

Cela étant, comme $|\lambda_*/\lambda^*| = |\lambda_*|/\lambda^* < 1$, on a

$$\lim_{k \to +\infty} \left(\frac{\lambda_*}{\lambda^*} \right)^k \;=\; 0$$

donc

$$\begin{aligned}
&\lim_{k \to +\infty} \frac{\alpha {\lambda^*}^{k+1} b + \beta {\lambda_*}^{k+1} b + \alpha {\lambda^*}^{k+1} u + \beta {\lambda_*}^{k+1} v}{\alpha {\lambda^*}^k b + \beta {\lambda_*}^k b + \alpha {\lambda^*}^k u + \beta {\lambda_*}^k v} \\
&\quad = \; \lambda^* \lim_{k \to +\infty} \frac{\alpha (b+u) + \beta (\lambda_*/\lambda^*)^{k+1} b + \beta (\lambda_*/\lambda^*)^{k+1} v}{\alpha (b+u) + \beta (\lambda_*/\lambda^*)^k b + \beta (\lambda_*/\lambda^*)^k v} \\
&\quad = \; \lambda^* \, \frac{\lim_{k \to +\infty} \left(\alpha (b+u) + \beta (\lambda_*/\lambda^*)^{k+1} b + \beta (\lambda_*/\lambda^*)^{k+1} v \right)}{\lim_{k \to +\infty} \left(\alpha (b+u) + \beta (\lambda_*/\lambda^*)^k b + \beta (\lambda_*/\lambda^*)^k v \right)} \\
&\quad = \; \lambda^* \, \frac{\alpha (b+u)}{\alpha (b+u)} \\
&\quad = \; \lambda^*.
\end{aligned}$$

De même quel que soit le naturel k, on a

$$\frac{\alpha {\lambda^*}^{k+1} b + \beta {\lambda_*}^{k+1} b}{\alpha {\lambda^*}^k b + \beta {\lambda_*}^k b} \;=\; \lambda^* \, \frac{\alpha + \beta (\lambda_*/\lambda^*)^{k+1}}{\alpha + \beta (\lambda_*/\lambda^*)^k}$$

donc

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{\alpha {\lambda^*}^{k+1} b + \beta {\lambda_*}^{k+1} b}{\alpha {\lambda^*}^k b + \beta {\lambda_*}^k b} = \; \lambda^*.$$

La même méthode permet de conclure aussi pour le second élément de la suite L^kX $(k \in \mathbb{N}_0)$.

La méthode est analogue pour la troisième limite. On doit en effet montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\alpha{\lambda^*}^k b + \beta{\lambda_*}^k b}{\alpha{\lambda^*}^k b + \beta{\lambda_*}^k b + \alpha{\lambda^*}^k u + \beta{\lambda_*}^k v} = \frac{b}{b+u}$$

et

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\alpha{\lambda^*}^k u + \beta{\lambda_*}^k v}{\alpha{\lambda^*}^k b + \beta{\lambda_*}^k b + \alpha{\lambda^*}^k u + \beta{\lambda_*}^k v} = \frac{u}{b+u}.$$

On fait donc les mises en évidence comme précédemment et on conclut de même. □

Notons qu'on a le cas plus général suivant, dont la preuve sort du cadre de ce cours.

Remarque 2.9.7. *Soit L une matrice carrée de Leslie régulière de dimension n. Alors il existe une valeur propre λ^*, simple, strictement positive et strictement plus grande que le module de toutes les autres valeurs propres et un vecteur propre X^* relatif à cette valeur propre λ^* dont les éléments sont strictement positifs.*

De plus, si X est un vecteur non nul quelconque dont la composante selon le vecteur X^* dans la base servant à ramener L à la forme de Jordan[7] alors

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\sum_{j=1}^n (L^{k+1}X)_j}{\sum_{j=1}^n (L^kX)_j} = \lambda^*,$$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{(L^{k+1}X)_j}{(L^kX)_j} = \lambda^* \quad \forall j = 1,\ldots,n$$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{L^kX}{\sum_{j=1}^n (L^kX)_j} = \frac{1}{\sum_{j=1}^n (X^*)_j}\, X^*.$$

Remarque 2.9.8. *Si la matrice de Leslie modélise l'évolution d'une population, classée selon l'âge par exemple, la comparaison de λ^* à 1 permet de dire que si $\lambda^* > 1$, la population augmente (de façon exponentielle), si $\lambda^* = 1$, la population se stabilise et si $\lambda^* < 1$, la population diminue et est en voie d'extinction.*

On peut se convaincre aisément de ce fait (en tout cas pour ce qui a été démontré ci-dessus[8]) de la manière suivante. Pour tout naturel k, on a (cf la preuve de 2.9.6)

$$L^kX = \alpha L^kX^* + \beta L^kX_* = \alpha{\lambda^*}^k X^* + \beta{\lambda_*}^k X_*.$$

Si $\lambda^* < 1$ alors $|\lambda_*| < 1$ donc $\lim_{k\to+\infty} {\lambda^*}^k = 0$ et $\lim_{k\to+\infty} {\lambda_*}^k = 0$, ce qui donne

$$\lim_{k\to+\infty} L^kX = 0.$$

Si $\lambda^* = 1$ alors $|\lambda_*| < 1$ et

$$L^kX = \alpha L^kX^* + \beta L^kX_* = \alpha X^* + \beta{\lambda_*}^k X_*$$

7. Plus loin, on verra la notion de diagonalisation et de diagonalisabilité d'une matrice carrée ; la transformation en forme de Jordan est une généralisation de la transformation en forme diagonale, avec dans ce cas l'existence de la transformation assurée pour toute matrice, ce qui n'est pas le cas pour la forme diagonale.

8. Le cas général reprend la même idée.

donc
$$\lim_{k\to+\infty} L^k X \ = \ \alpha X^*.$$
Enfin, si $\lambda^* > 1$, on a
$$\begin{aligned} L^k X &= \alpha L^k X^* + \beta L^k X_* \\ &= \alpha {\lambda^*}^k X^* + \beta {\lambda_*}^k X_* \\ &= {\lambda^*}^k \left(\alpha X^* + \beta \left(\frac{\lambda_*}{\lambda^*}\right)^k X_* \right); \end{aligned}$$
dès lors, comme $0 \le |\lambda_*|/\lambda^* < 1$, on a
$$\lim_{k\to+\infty} \left(\alpha X^* + \beta \left(\frac{\lambda_*}{\lambda^*}\right)^k X_* \right) \ = \ \alpha X^*$$
et on peut dire que l'évolution de la population, à savoir les $L^k X$ ($k \in \mathbb{N}_0$) se comportent comme
$$\alpha {\lambda^*}^k X^* \ = \ \alpha e^{k\ln(\lambda^*)} X^*$$
avec $\ln(\lambda^*) > 0$.

Dans le cas des matrices stochastiques on a les résultats suivants (certains sont bien sûr dus au fait qu'une matrice stochastique est une matrice de Leslie mais pour clarifier, nous reprenons les preuves adaptées à ce cas).

Rappelons et complétons tout d'abord les définitions.

Définition 2.9.9. — *Une* matrice stochastique *est une matrice carrée dont les éléments sont des réels positifs et dont la somme des éléments de chaque colonne est égale à* 1.
— *Un* vecteur de probabilité *est un vecteur dont les éléments sont des réels positifs et de somme égale à* 1. *Une matrice stochastique est donc une matrice dont les colonnes sont des vecteurs de probabilité.*
— *Une matrice stochastique est dite* régulière *lorsque l'une de ses puissances possède des éléments qui sont tous strictement positifs*[9].
— *Si T est une matrice stochastique et X_0 un vecteur de probabilité, la* chaîne de Markov *associée est la suite de vecteurs*
$$X_0,\ X_1 = TX_0,\ X_2 = TX_1 = T^2X_0,\ \ldots$$

Propriété(s) 2.9.10 (Matrices stochastiques)**.** *1. Si T est une matrice stochastique et X un vecteur de probabilité, alors le vecteur TX est encore un vecteur de probabilité.*

2. Si T est une matrice stochastique et si k est un naturel, alors T^k est encore une matrice stochastique.

3. Une matrice stochastique possède toujours la valeur propre 1 *et toutes les valeurs propres sont de module inférieur ou égal à* 1.

Preuve. Supposons que les matrices (et les vecteurs) soient de dimension n.

1) Quel que soit $j \in \{1, \ldots, n\}$, on a $(TX)_j = \sum_{k=1}^n (T)_{j,k}(X)_k$ donc les éléments de TX sont des réels positifs. De plus, leur somme vaut 1 car on a
$$\sum_{j=1}^n (TX)_j = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (T)_{j,k}(X)_k = \sum_{k=1}^n (X)_k \left(\sum_{j=1}^n (T)_{j,k} \right) = \sum_{k=1}^n (X)_k = 1.$$

9. On va démontrer que toute puissance d'une matrice stochastique est encore une matrice stochastique.

2) Procédons par récurrence. On suppose que T est une matrice stochastique. Montrons alors que si k est un naturel tel que la matrice T^k soit stochastique, alors la matrice T^{k+1} l'est aussi. On pourra alors conclure.
De fait, si on désigne par $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de T^k, la matrice T^{k+1} est

$$T^{k+1} = T(C_1 \ldots C_n) = (TC_1 \ldots, TC_n),$$

c'est-à-dire que les colonnes de T^{k+1} apparaissent comme résultant du produit de la matrice stochastique T et des vecteurs de probabilité $C_1, \ldots, C_n$. Vu ce qui précède, il s'agit donc de vecteurs de probabilité et on conclut.

3) Si X est le vecteur colonne dont tous les éléments sont égaux à 1, alors on a $\widetilde{T}X = X$, par définition des matrices stochastiques. Le nombre 1 est donc valeur propre de $\widetilde{T}$, donc de T puisque ces matrices possèdent les mêmes valeurs propres.
Soit maintenant une valeur propre quelconque λ de T et soit un vecteur propre X de $\widetilde{T}$ relatif à celle-ci. Si $k \in \{1, \ldots, n\}$ est tel que $|(X)_k| = \sup\{|(X)_j| \ : 1 \leq j \leq n\}$ alors $|(X)_k| \neq 0$ et

$$\begin{aligned}
|\lambda| = \frac{1}{|(X)_k|}\ |(\lambda X)_k| = \frac{1}{|(X)_k|}\left|\left(\widetilde{T}X\right)_k\right| \quad &= \quad \frac{1}{|(X)_k|}\left|\sum_{j=1}^{n}(\widetilde{T})_{k,j}(X)_j\right| \\
&\leq \quad \frac{1}{|(X)_k|}\sum_{j=1}^{n}(\widetilde{T})_{k,j}\,|(X)_j| \\
&\leq \quad \sum_{j=1}^{n}(\widetilde{T})_{k,j} \ = \ 1.
\end{aligned}$$

□

Propriété(s) 2.9.11 (Chaînes de Markov). *1. Exemple des matrices de dimension* 2. *Soit T une matrice stochastique, à savoir*

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$$

avec $a, b \in [0,1]$. Alors
(1) les valeurs propres de T sont les réels 1 *et $a - b$,*
(2) si $a - b \neq 1$, il existe un unique vecteur de probabilité qui soit un vecteur propre relatif à la valeur propre 1*,*
(3) si $|a - b| < 1$, pour toute condition initiale X (vecteur de probabilité), la suite $T^k X$ ($k \in \mathbb{N}_0$) converge vers l'unique vecteur de probabilité qui soit un vecteur propre relatif à la valeur propre 1*.*

2. Soit T une matrice stochastique régulière. Alors
(1) la valeur propre 1 *est de multiplicité* 1 *et il existe un unique vecteur de probabilité qui soit un vecteur propre de valeur propre* 1*,*
(2) pour toute condition initiale X (vecteur de probabilité), la suite $T^k X$ ($k \in \mathbb{N}_0$) converge vers l'unique vecteur de probabilité qui soit un vecteur propre de valeur propre 1*.*

Preuve. 1) Vu la définition, toute matrice stochastique peut effectivement s'écrire de manière annoncée.

(1) Par un calcul direct, on obtient

$$det(T-\lambda\mathbb{1}) = det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ 1-a & 1-b-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-1)\ (\lambda-(a-b)),$$

d'où la conclusion du premier point.

(2) Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que

$$\begin{pmatrix} a-1 & b \\ 1-a & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

ou encore tels que

$$(a-1)x+by=0.$$

Comme les coefficients $a-1$ et b ne sont pas simultanément nuls, il s'agit donc des vecteurs

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} b \\ 1-a \end{pmatrix},\ r\in\mathbb{C}_0.$$

Si un tel vecteur est de probabilité, alors on a $rb+r(1-a)=1$ donc $r=1/(1-a+b)$, donc on a l'unicité. Par ailleurs, le vecteur propre obtenu en prenant cette valeur de r est bien un vecteur de probabilité. Donc on conclut pour le point (2).

(3) Désignons par X_0 le vecteur propre de probabilité relatif à la valeur propre 1 et désignons par Y un vecteur propre relatif à la valeur propre $a-b$. Si X est un vecteur quelconque de probabilité, alors il existe des complexes c, c' tels que

$$X = cX_0 + c'Y.$$

On applique alors successivement la matrice T aux deux membres de l'égalité et on obtient ainsi

$$T^kX = cX_0 + c'(a-b)^kY$$

quel que soit le naturel k. Comme $|a-b|<1$, on en déduit que la suite T^kX $(k\in\mathbb{N}_0)$ converge vers cX_0. Pour conclure, il reste donc à montrer que $c=1$. De fait, si on désigne par α,β les éléments de Y et par x_0, y_0 les élements de X_0, comme T^kX est un vecteur de probabilité quel que soit k, on a

$$c(x_0+y_0)+c'(a-b)^k(\alpha+\beta)=1,\ \ k\in\mathbb{N}_0.$$

Comme la suite $(a-b)^k$ $(k\in\mathbb{N}_0)$ converge vers 0 et comme $x_0+y_0=1$, on en déduit que $c=1$ et on conclut.

2) Admis. □

Cela étant, reprenons les exemples introductifs (reproduction des souris et mouvement de population ville-faubourg).

Dans le cas du mouvement de population ville-faubourg, la modélisation détermine une matrice stochastique. Les calculs faits précédemment (cf exemples de recherche de valeurs propres et de vecteurs propres) ont conduit à trouver que les vecteurs propres de valeur propre 1 sont les vecteurs

$$X = c\begin{pmatrix} b \\ 1-a \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 0,03 \\ 0,05 \end{pmatrix},\quad c\in\mathbb{C}_0.$$

Parmi ces vecteurs, celui qui est de probabilité est celui où $c = 1/(0,03+0,05) = 1/0,08$ vecteur. On obtient donc

$$X = \begin{pmatrix} 0,03/0,08 \\ 0,05/0,08 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3000/8000 \\ 5000/8000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,375 \\ 0,625 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, à partir d'une population de départ quelconque de 1 000 000 d'habitants, on évolue vers une population de

375 000 habitants en ville et 625 000 habitants dans les faubourgs.

Dans le cas de la reproduction des souris, la diagonalisation [10] de la matrice de transition (matrice de Leslie) L permet de calculer directement ses puissances. Le calcul conduit à

$$L^t = S \begin{pmatrix} 2^t & 0 \\ 0 & (-1)^t \end{pmatrix} S^{-1}$$

pour tout naturel t, où S est la matrice [11]

$$S = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notons que les colonnes sont des vecteurs propres relatifs aux valeurs propres 2 et -1 de la matrice de Leslie [12]. Après calculs, on trouve

$$\begin{pmatrix} j_t \\ a_t \end{pmatrix} = V_t = L^t V_0 = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 8.2^t + 4.(-1)^t & 32.2^t - 32\,(-1)^t \\ 2^t - (-1)^t & 4.2^t + 8.(-1)^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on obtient

$$j_t = \frac{40}{3}\,2^t + \frac{20}{3}\,(-1)^t, \quad a_t = \frac{5}{3}\left(2^t - (-1)^t\right), \quad n_t = 15.2^t + 5.(-1)^t.$$

Dès lors

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{j_t}{n_t} = \frac{8}{9}, \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{a_t}{n_t} = \frac{1}{9}, \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{n_{t+1}}{n_t} = 2.$$

Remarquons que la dernière limite est bien la plus grande des valeurs propres de L et que les deux premières limites sont bien les deux composantes du vecteur propre

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de valeur propre 2, divisées par leur somme (cf théorème de Perron-Frobenius).

2.9.5 La diagonalisation des matrices carrées

Définition 2.9.12. *Une matrice A est diagonalisable s'il existe une matrice inversible S de même dimension telle que la matrice $S^{-1}AS$ soit une matrice diagonale.*

10. Voir la sous-section suivante.
11. C'est une matrice qui diagonalise L, voir la sous-section suivante.
12. C'est dû à la diagonalisation, voir sous-section suivante.

Définition 2.9.13. *Si la matrice inversible S est telle que $S^{-1}AS$ est une matrice diagonale, on dit que S diagonalise A.*

Diagonaliser A consiste à déterminer S et la matrice diagonale correspondante $S^{-1}AS$.

En fait, quand on sait que A est diagonalisable, trouver les éléments diagonaux de $S^{-1}AS$ est simple, comme on va s'en rendre compte tout de suite. Construire S n'est pas difficile non plus mais nécessite davantage de calculs.

Cependant, il n'est pas possible de diagonaliser toutes les matrices, comme nous allons le voir.

Identifions les éléments diagonaux de la matrice $S^{-1}AS$ lorsque celle-ci est diagonale.

Propriété(s) 2.9.14. *Si S est une matrice inversible telle que $S^{-1}AS$ est une matrice diagonale, alors les éléments diagonaux de cette matrice diagonale sont les valeurs propres de A.*

Preuve. On sait que les valeurs propres d'une matrice B sont les zéros du polynôme $\lambda \mapsto \det(B - \lambda\mathbb{1})$ et que les valeurs propres d'une matrice diagonale sont les éléments diagonaux de celle-ci. Pour prouver le résultat annoncé, il suffit donc de montrer que les matrices A et $S^{-1}AS$ ont le même polynôme caractéristique.

De fait, on a

$$\begin{aligned} \det\left(S^{-1}AS - \lambda\mathbb{1}\right) &= \det\left(S^{-1}AS - \lambda S^{-1}\mathbb{1}S\right) \\ &= \det\left(S^{-1}(A - \lambda\mathbb{1})S\right) \\ &= \det\left(S^{-1}\right)\,\det(A - \lambda\mathbb{1})\,\det(S), \end{aligned}$$

la dernière égalité étant obtenue par le fait que le déterminant d'un produit de matrices carrées de même dimension est égal au produit des déterminants des matrices. Ensuite, encore à cause de cette propriété et du fait que $S^{-1}S = \mathbb{1}$, on a $1 = \det(S^{-1})\,\det(S)$ donc finalement

$$\det\left(S^{-1}AS - \lambda\mathbb{1}\right) \;=\; \det\left(S^{-1}\right)\,\det(A - \lambda\mathbb{1})\,\det(S) \;=\; \det(A - \lambda\mathbb{1}).$$

□

Venons-en maintenant à une autre propriété de la diagonalisation, laquelle va fournir un critère de diagonalisibilité.

Commençons par établir une propriété de manipulation de certaines égalités matricielles, lesquelles seront bien utiles pour obtenir la caractérisation de la diagonalisabilité d'une matrice carrée.

Propriété(s) 2.9.15. *Soit une matrice carrée A de dimension n. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres et $X_1, \ldots, X_n$ des vecteurs propres associés à celles-ci, respectivement. Si S est la matrice carrée de dimension n dont les colonnes sont respectivement $X_1, \ldots, X_n$ alors on a l'égalité*

$$A\,S \;=\; S\,diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Preuve. D'une part, par définition du produit matriciel, AS est la matrice dont les colonnes sont $AX_1, \ldots, AX_n$, ou encore $\lambda_1 X_1, \ldots, \lambda_n X_n$ puisque X_k est vecteur propre de valeur propre λ_k quel que soit $k \in \{1, \ldots, n\}$.

D'autre part, par définition du produit matriciel encore, la matrice $S\,diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ a pour vecteurs-colonnes les vecteurs

$$S \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_k \text{ à la ligne numéro } k,$$

c'est-à-dire les vecteurs $\lambda_k X_k$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Les matrices AS et $S\,diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ayant les mêmes colonnes, elles sont égales. □

Propriété(s) 2.9.16. *Si S est une matrice inversible telle que $S^{-1}AS$ est une matrice diagonale, alors les colonnes de S sont des vecteurs propres de la matrice A.*

Si S est une matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres de A et qui est inversible, alors la matrice $S^{-1}AS$ est une matrice diagonale.

Preuve. Si

$$S^{-1}AS \;=\; diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

on a aussi

$$A\,S \;=\; S\,diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

ce qui montre que les colonnes de S sont des vecteurs propres de A vu la forme des colonnes de la matrice du membre de droite de l'égalité.

Réciproquement, si S est une matrice dont les colonnes $X_1, \ldots, X_n$ sont des vecteurs non nuls tels que $AX_k = \lambda_k X_k$ pour tout $k = 1, \ldots, n$, alors on a

$$A\,S \;=\; S\,diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Dès lors, si S est inversible, on obtient bien que $S^{-1}AS$ est une matrice diagonale. □

De ce qui précède on déduit alors le critère suivant.

Propriété(s) 2.9.17. *Une matrice de dimension n est diagonalisable si et seulement s'il existe des vecteurs propres $X_1, \ldots, X_n$ tels que la matrice formée par ceux-ci soit inversible.*

Il est utile de se rappeler ici la propriété 2.9.5, laquelle implique alors qu'*une matrice dont les valeurs propres sont distinctes est toujours diagonalisable.*

Voici en détail ce qui se passe pour les matrices de dimension 2*.*

Deux cas peuvent se présenter. Dans le cas où les valeurs propres de la matrice sont distinctes, la matrice est diagonalisable. Dans le cas où on a une valeur propre double, la matrice est diagonalisable si et seulement si elle admet deux vecteurs propres qui ne sont pas multiples l'un de l'autre.

Et voici en détail ce qui se passe pour les matrices de dimension 3*.*

Ici, on a davantage de situations différentes.

(1) Dans le cas où les valeurs propres de la matrice sont distinctes, la matrice est diagonalisable.

(2) Dans le cas où une valeur propre est double, la matrice est diagonalisable si et seulement si elle admet deux vecteurs propres relatifs à la valeur propre double qui ne sont pas multiples

l'un de l'autre.
(3) Dans le cas où la matrice admet une valeur propre triple, la matrice est diagonalisable si et seulement si elle admet trois vecteurs propres relatifs à la valeur propre triple qui forment une matrice inversible lorsqu'on les place sur les colonnes de cette dernière.

2.9.6 Exemples

Reprenons les exemples de matrices donnés précédemment. Pour chaque cas, on demande si la matrice est diagonalisable et si la réponse est oui, on demande de la diagonaliser.

1) La matrice A

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a comme valeurs propres les nombres 1 et -1. Les deux valeurs propres étant simples, cette matrice est diagonalisable.

Les vecteurs

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont respectivement des vecteurs propres de valeur propre 1 et -1. La matrice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est telle que

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2) La matrice A

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a comme valeurs propres les complexes i et $-i$. La matrice est donc diagonalisable car elle est de dimension 2 et possède deux valeurs propres distinctes.

Les vecteurs

$$X_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont respectivement des vecteurs propres de valeur propre i et $-i$. La matrice

$$S = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est telle que

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

3) La matrice A

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a la valeur propre double 0.

L'ensemble des vecteurs propres de valeur propre 0 sont les vecteurs qui s'écrivent

$$X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{C}_0.$$

Ils sont tous multiples du vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

deux vecteurs propres sont donc toujours multiples l'un de l'autre. Il s'ensuit que la matrice A n'est pas diagonalisable.

4) La matrice A

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a les valeurs propres 0 et 1 (valeur propre double 0 et valeur propre simple 1).

L'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre double 0 sont les vecteurs

$$X = x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad x, z \in \mathbb{C}, \text{non simultanément nuls.}$$

En particulier, les vecteurs

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

sont des vecteurs qui ne sont pas multiples l'un de l'autre.

Le vecteur

$$X = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

est un vecteur propre relatif à la valeur propre simple 1.

Il s'ensuit que la matrice de départ est diagonalisable et que

$$S = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

est inversible et telle que

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

5) La matrice A

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

a 1 comme valeur propre (valeur propre triple).

L'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont les vecteurs

$$X = x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad x, z \in \mathbb{C} \quad \text{non simultanément nuls.}$$

Trois vecteurs propres forment donc toujours une matrice dont le déterminant est nul. La matrice de départ n'est donc pas diagonalisable.

6) Les valeurs propres de la matrice A

$$\begin{pmatrix}7 & -4 & 8\\-2 & 3 & -2\\-5 & 4 & -6\end{pmatrix}$$

sont $-1, 2, 3$. Ces valeurs propres étant toutes distinctes, la matrice est diagonalisable.

Les vecteurs

$$X_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

sont respectivement des vecteurs propres associés aux valeurs propres $-1, 2, 3$. Il s'ensuit que

$$S = (X_1, X_2, X_3) = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 2 & 1\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

est inversible et telle que

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Chapitre 3

Fonctions de plusieurs variables

3.1 Introduction, définitions, représentations

Jusqu'à présent, nous avons considéré des fonctions d'une variable réelle. Nous allons à présent introduire et étudier les fonctions qui dépendent non plus d'une seule, mais de plusieurs variables réelles. Dans un premier temps, nous n'envisagerons que le cas où ces fonctions sont à valeurs réelles et dépendent de deux ou trois variables réelles.

3.1.1 Définitions, représentations

Définitions et premiers exemples

Définition 3.1.1. *Une fonction de deux variables réelles à valeurs réelles est une loi qui à tout point d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ (c'est-à-dire du plan) associe un nombre réel. On écrit*

$$f \ : \ A \to \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto f(x, y).$$

L'ensemble des points du plan où f est défini est appelé domaine de définition de f (et est noté dom(f)) et l'ensemble des valeurs de f, c'est-à-dire l'ensemble de $\mathbb{R}$ $\{f(x, y) \ : \ (x, y) \in dom(f)\}$, est appelé image de f.

Une fonction de trois variables réelles à valeurs réelles est une loi qui à tout point d'un sous ensemble de $\mathbb{R}^3$ (c'est-à-dire de l'espace) associe un nombre réel. On écrit

$$f \ : \ A \to \mathbb{R} \quad (x, y, z) \mapsto f(x, y, z).$$

L'ensemble des points de l'espace où f est défini est appelé domaine de définition de f (et est noté dom(f)) et l'ensemble des valeurs de f, c'est-à-dire l'ensemble $\{f(x, y, z) \ : \ (x, y, z) \in dom(f)\}$, est appelé image de f.

Voici quelques exemples de fonctions de plusieurs variables rencontrées de façon usuelle.

— Aire d'un rectangle de côtés x, y :

$$A(x, y) = xy$$

— Volume d'un parallélépipède de base rectangulaire (de côtés x, y et de hauteur z) :

$$V(x, y, z) = xyz$$

— Dans un repère orthonormé, la distance entre un point P de coordonnées (x, y, z) et l'origine des axes s'exprime par

$$d(x, y, z) = \left\| \overrightarrow{OP} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

— Force gravitationnelle exercée par le soleil (supposé être à l'origine des axes) sur une masse unitaire située au point de coordonnées (x, y, z) :

$$F(x, y, z) = \frac{c}{x^2 + y^2 + z^2}$$

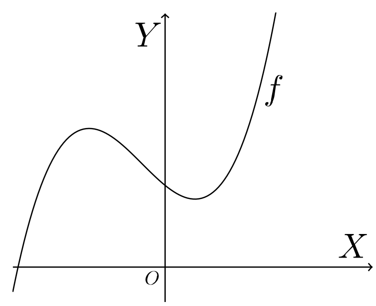
(c est une constante strictement positive).

Représenter une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles, c'est représenter son graphe, à savoir l'ensemble

$$\{(x, f(x)) \ : \ x \in dom(f)\}.$$

Pour cela, on utilise (le plus souvent) un repère orthonormé du plan et on représente les points de coordonnées cartésiennes $(x, f(x))$ lorsque x varie dans le domaine de f.

La représentation graphique de f s'appelle une courbe. Il s'agit de la courbe d'équation cartésienne $y = f(x)$. On utilise le terme « courbe » car, par définition, *une courbe est un ensemble de points décrits à l'aide d'une seule variable réelle.*

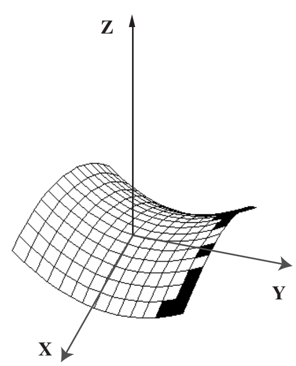


De façon analogue, représenter une fonction de deux variables réelles, à valeurs réelles, c'est représenter l'ensemble

$$\{(x, y, f(x, y)) \ : \ (x, y) \in dom(f)\}.$$

Pour cela, on utilise un repère orthonormé de l'espace et on représente les points de coordonnées cartésiennes $(x, y, f(x, y))$ lorsque (x, y) varie dans le domaine de f.

La représentation graphique de f s'appelle une surface. Il s'agit de la surface d'équation cartésienne $z = f(x, y)$. On utilise le terme « surface » car, par définition, *une surface est un ensemble de points décrits à l'aide de deux variables réelles.*



Si on désire suivre le même processus, représenter une fonction de trois variables réelles à valeurs réelles n'est plus possible : on devrait pouvoir représenter un ensemble de « quadruplets » $(x, y, z, f(x, y, z))$! Pour avoir une idée du comportement des valeurs de la fonction, on en considère alors des *surfaces de niveau*, lesquelles sont définies dans ce qui suit.

Courbes de niveau

Pour donner une idée de f, fonction de deux variables réelles, pour en utiliser certains éléments, en d'autres termes pour examiner des propriétés de la surface qui représente f, on introduit la notion de courbe de niveau.

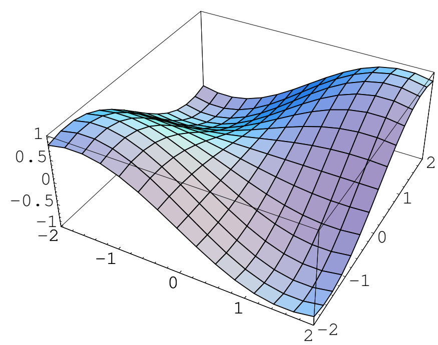
Si f est une fonction de deux variables et si r appartient à l'image de f, l'ensemble

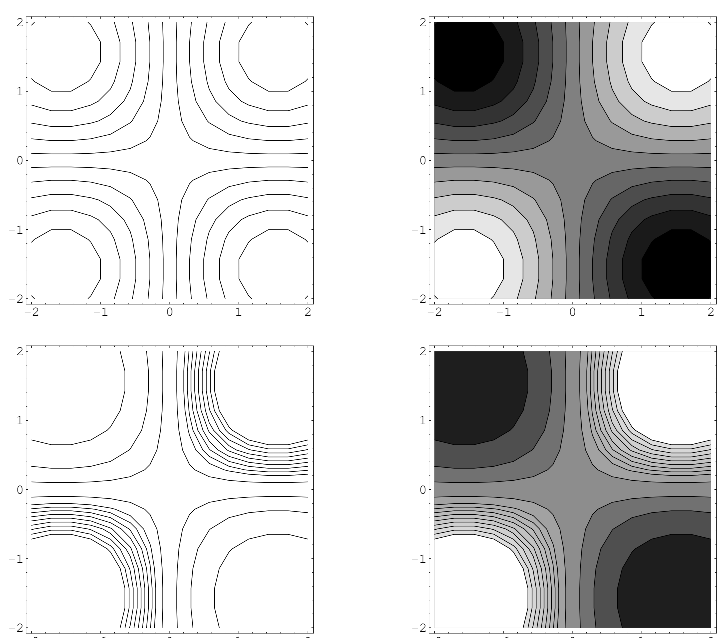
$$\{(x, y) \in dom(f) \ : \ f(x, y) = r\}$$

s'appelle une courbe de niveau de f. Le terme courbe est encore employé ici car il s'agit de points qui sont décrits à l'aide d'une seule variable réelle.

Sur une carte, ce que l'on appelle « courbe de niveau » est l'ensemble des points de la carte qui sont situés à une même altitude. Si $f(x, y)$ désigne l'altitude au point de coordonnées (x, y), si h est une constante positive (une altitude donnée), il s'agit bien de l'ensemble des points où $f(x, y) = h$, ce qui justifie l'appellation. De même, les isothermes d'une région (resp. les isobares), sont des courbes de niveau : ce sont les points (du sol, par exemple) qui ont une même température (resp. pression atmosphérique).

Voici la représentation graphique d'une fonction de deux variables et des représentations de courbes de niveau (la représentation des courbes avec divers niveaux de gris est la même que celle de la voisine mais les niveaux de gris permettent d'augmenter l'information : plus la valeur de la fonction est grande, plus le gris est clair). Sur les premières courbes, la différence entre les divers niveaux représentés est constante ; ce n'est pas le cas sur les secondes.





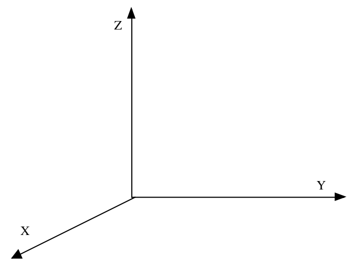
Remarquons que la représentation graphique d'une fonction f d'une variable est une courbe de niveau. En effet, si on pose $g(x, y) = y - f(x)$, on a

$$g(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x)$$

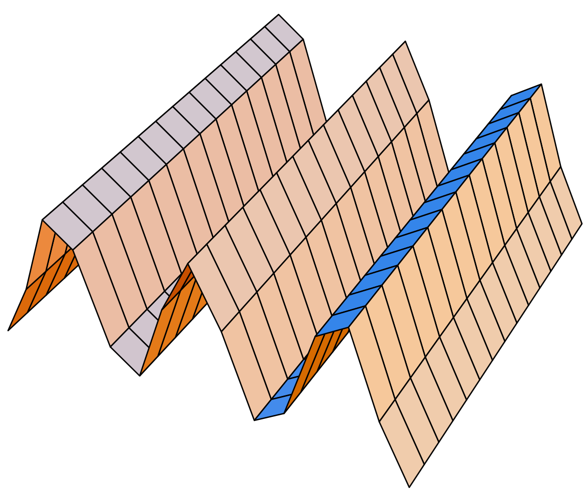
donc la représentation de f est une courbe de niveau de $g(x, y) = y - f(x)$.

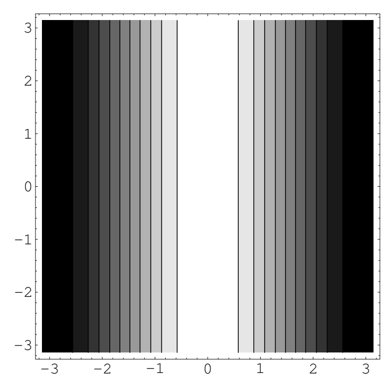
Exemples

Dans ce qui suit, les représentations à trois dimensions sont toujours faites dans un sytème du type représenté ci-dessous. Nous avons omis les axes afin de ne pas alourdir les figures.

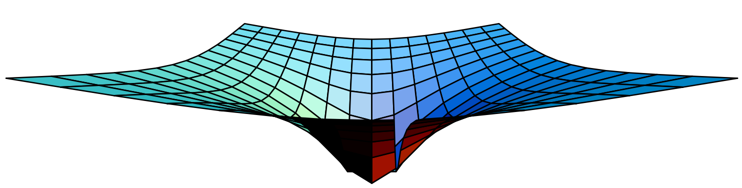


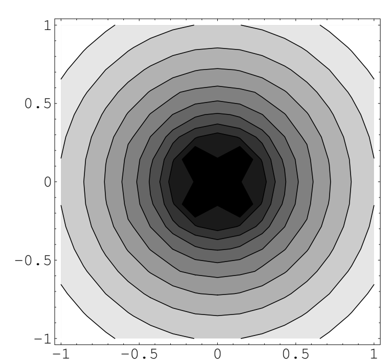
1) Représentation graphique de $f(x, y) = \cos(y)$ et de courbes de niveau (avec même différence entre les niveaux).





2) Représentation graphique de $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ et de courbes de niveau (avec même différence entre les niveaux).





Surfaces de niveau

Pour donner une idée de f, fonction de trois variables réelles, on introduit la notion de surface de niveau.

Si f est une fonction de trois variables et si r appartient à l'image de f, l'ensemble

$$\{(x, y, z) \in dom(f) \; : \; f(x, y, z) = r\}$$

s'appelle une surface de niveau de f. Le terme surface est encore employé ici car il s'agit de points qui sont décrits à l'aide de deux variables réelles. Pour donner une idée de la représentation d'une surface de niveau, on effectue souvent l'intersection de cette surface avec des plans orthogonaux aux axes X, Y, Z. Ces intersections sont appelées traces de la surface sur les plans.

Par exemple, si $f(x, y, z)$ désigne la température au point de coordonnées (x, y, z) d'une région de l'espace, la surface de niveau d'équation $f(x, y, z) = c$ est la surface sur laquelle la température est constante et vaut c ; elle est appelée surface isotherme. De même, si $V(x, y, z)$ désigne le potentiel (électrique) au point de coordonnées (x, y, z), la surface de niveau d'équation $V(x, y, z) = c$ est appelée surface équipotentielle.

Remarquons que la représentation graphique d'une fonction f de deux variables est une surface de niveau. En effet, si on pose $g(x, y, z) = z - f(x, y)$ alors

$$g(x, y, z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = f(x, y);$$

dès lors la représentation graphique de f est une surface de niveau de $g(x, y, z) = z - f(x, y)$.

Surfaces quadriques

Dans l'espace, les surfaces de niveau d'une fonction polynomiale du second degré (en toutes les variables)

$$f(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{12}xy + a_{13}xz + a_{23}yz + b_1x + b_2y + b_3z + c$$

où les a_{ij}, b_i, c sont des réels tels que les a_{ij} ne soient pas tous nuls s'appellent *surfaces quadriques*.

Tout comme dans le cas des coniques du plan, on montre qu'un changement de repère adéquat permet de ramener l'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$ à une forme canonique (en fait il s'agit de changer de repère de telle sorte que la matrice qui représente la quadrique ait une forme diagonale ; dans ce cas, dans l'équation cartésienne obtenue, il n'y a plus de terme du second degré faisant intervenir deux variables distinctes). Les différents types d'équations canoniques figurent dans la liste exhaustive suivante. On classe alors les quadriques en quadriques du type elliptique, hyperbolique, parabolique ; si l'on excepte les cas où la quadrique dégénère en plans, il existe 9 types de quadriques.

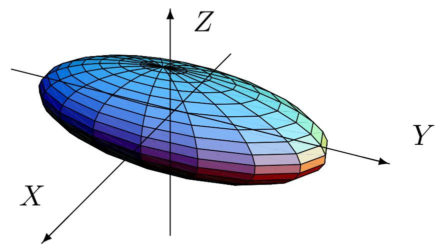
Une aide à la représentation d'une quadrique consiste à considérer les traces de cette surface dans des plans orthogonaux aux axes (c'est-à-dire les intersections de la surface avec des plans orthogonaux aux axes) [1].

— $\boxed{\text{Ellipsoïde}}$: surface d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

où a, b, c sont des réels strictement positifs.

1. Il s'agit en fait aussi de courbes de niveaux (mais les différents niveaux ne se prennent plus uniquement selon Z, mais aussi selon X, Y.

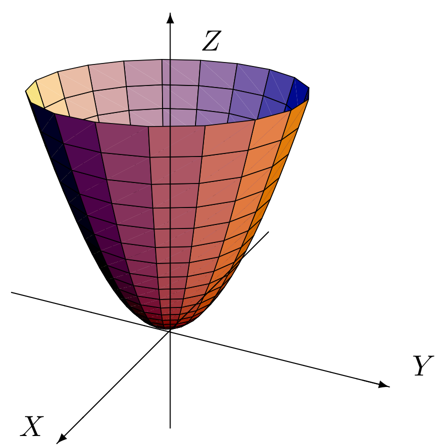


La trace de cette surface sur un plan orthogonal à l'un des axes de coordonnées est vide ou est une ellipse. Par exemple, si $z = r$ avec $r \in]-c, c[$ alors la trace correspondante a pour équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{r^2}{c^2}$; ceci est bien l'équation d'une ellipse.
Lorsque $a = b = c$, l'ellipsoïde est une sphère de rayon a (ensemble des points qui sont situés à une distance a de l'origine).

— $\boxed{\text{Paraboloïde elliptique}}$: surface d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = pz$$

où $a > 0, b > 0, p \in \mathbb{R}_0$.

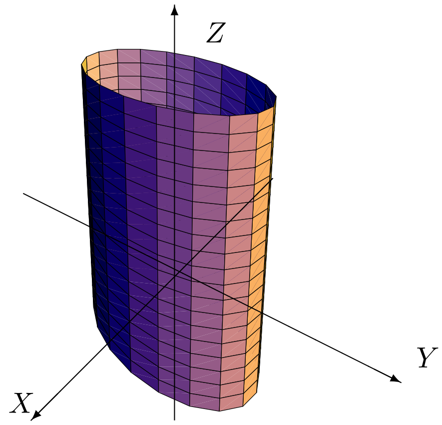


La trace sur un plan orthogonal à l'axe Z est vide ou est une ellipse. La trace sur un plan orthogonal à l'axe X (ou Y) est une parabole.

— $\boxed{\text{Cylindre elliptique}}$: surface d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

où a, b sont des réels strictement positifs.

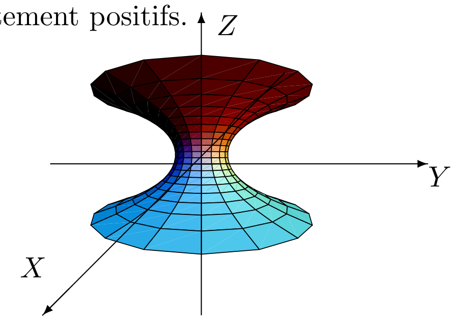


La trace sur un plan orthogonal à l'axe Z est une ellipse. La trace sur un plan orthogonal à l'axe X (ou Y) est vide ou formée de deux droites parallèles.

— $\boxed{\text{Hyperboloïde à une nappe}}$: surface d'équation cartésienne

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

où a, b, c sont des réels strictement positifs.

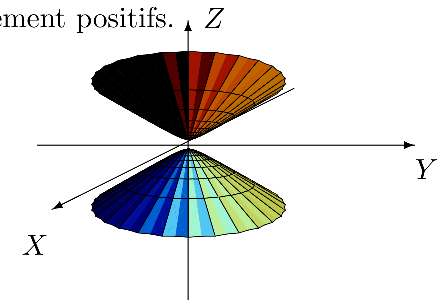


La trace sur un plan orthogonal à l'axe Z est une ellipse ; la trace sur un plan orthogonal à l'axe X (ou à l'axe Y) est une hyperbole.

— $\boxed{\text{Hyperboloïde à deux nappes}}$: surface d'équation cartésienne

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

où a, b, c sont des réels strictement positifs.

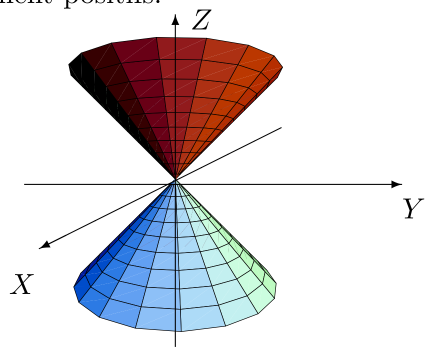


La trace sur un plan orthogonal à l'axe Z est vide ou une ellipse ; la trace sur un plan orthogonal à l'axe X (ou à l'axe Y) est une hyperbole.

— $\boxed{\text{Cône}}$: surface d'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

où a, b, c sont des réels strictement positifs.

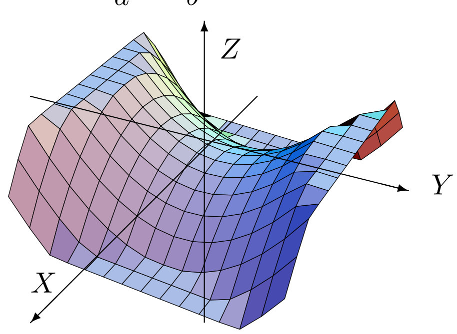


La trace sur un plan orthogonal à l'axe Z ne passant pas par l'origine est une ellipse ; la trace sur le plan d'équation $z = 0$ est l'origine. La trace sur un plan orthogonal à l'axe X (ou Y) est formée par deux droites sécantes si le plan passe par l'origine et est une hyperbole dans les autres cas.

— $\boxed{\text{Paraboloïde hyperbolique}}$: surface d'équation cartésienne

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2pz$$

où $a, b > 0$ et $p \in \mathbb{R}_0$.

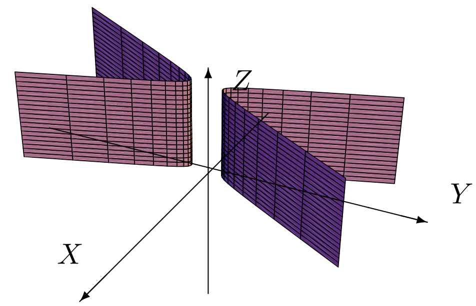


La trace sur un plan orthogonal à l'axe Z ne passant pas par l'origine est une hyperbole ; la trace sur le plan d'équation $z = 0$ est formée par l'union de deux droites sécantes. La trace sur un plan orthogonal à l'axe X (ou Y) est une parabole.

— $\boxed{\text{Cylindre hyperbolique}}$: surface d'équation cartésienne

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

où a, b sont des réels strictement positifs.

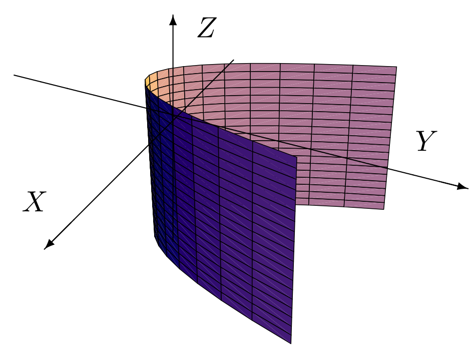


La trace sur un plan orthogonal à l'axe Z est une hyperbole. La trace sur un plan orthogonal à l'axe X (ou Y) est vide ou formée de deux droites parallèles à l'axe Z.

— Cylindre parabolique : surface d'équation cartésienne

$$x^2 = py$$

où p est un réel non nul.



La trace sur un plan orthogonal à l'axe Z est une parabole. La trace sur un plan orthogonal à l'axe X est une droite. La trace sur un plan orthogonal à l'axe Y est vide ou formée de deux droites parallèles à l'axe Z.

Remarque sur les termes ≪ elliptique, hyperbolique, parabolique ≫ : le terme elliptique (resp. hyperbolique) est employé lorsque, dans l'équation canonique, les coefficients devant les termes du second degré sont de même signe (resp. de signes différents). Le terme parabolique est utilisé lorsque, dans l'équation canonique, subsiste un terme du premier degré. Le terme cylindrique est utilisé lorsque, dans l'équation canonique, une variable est manquante.

3.1.2 Opérations entre fonctions

Comme dans le cadre des fonctions d'une variable réelle, on définit la somme, le produit, le quotient de deux fonctions de plusieurs variables à valeurs réelles (ou complexes).

Quant à la composition de fonctions (terme plus général que ≪ fonction de fonction ≫), elle se définit aussi de manière analogue. Accordons une attention particulière à ce point car il est important lorsque l'on parle de ≪ dérivée partielle, dérivée totale, règle de dérivation en chaîne (≪ chain rule ≫) ≫. Les cours de sciences font abondamment appel à ce genre de technique.

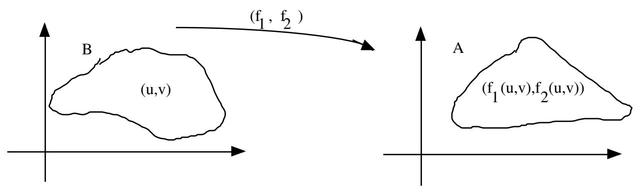
Par exemple, si f est de domaine $A \subset \mathbb{R}^2$, si f_1, f_2 sont à valeurs réelles et définies dans

$B \subset \mathbb{R}^2$ alors la fonction composée définie explicitement par

$$F(u,v) = f\left(f_1(u,v), f_2(u,v)\right)$$

est définie dans

$$\{(u,v) \in B \ : \ (f_1(u,v), f_2(u,v)) \in A\}$$



De même si f est de domaine $A \subset \mathbb{R}^3$, si f_1, f_2, f_3 sont à valeurs réelles et définies dans $B \subset \mathbb{R}$ alors la fonction composée définie explicitement par

$$F(t) = f\left(f_1(t), f_2(t), f_3(t)\right)$$

est définie dans

$$\{t \in B \ : \ (f_1(t), f_2(t), f_3(t)) \in A\}.$$

3.2 Limites, continuité, dérivation

3.2.1 Limites, continuité

La notion de limite s'introduit de manière analogue au cas d'une variable.

Les propriétés concernant les combinaisons linéaires, produits, quotients, fonctions composées sont analogues à celles rencontrées dans le cadre des fonctions d'une variable réelle, de même que les propriétés concernant les inégalités (notamment le théorème de l'étau).

La continuité s'introduit aussi de la même manière que dans le cas des fonctions d'une variable. Les propriétés sont aussi analogues (opérations entre fonctions : combinaisons linéaires, produits, quotients, fonctions composées).

Définition 3.2.1. *Soit f une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}^2$ et soit $(x_0, y_0) \in A$. On dit que la fonction est continue au point (x_0, y_0) si*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \quad \text{existe.}$$

Dans ce cas, elle vaut nécessairement $f(x_0, y_0)$.

On dit que f est continu sur A si cette fonction est continue en tout point de A.

Si f est une fonction définie sur A, l'ensemble des points de A où elle est continue s'appelle le domaine de continuité de f.

L'ensemble des fonctions continues sur A est noté

$$C_0(A).$$

3.2.2 Dérivation

Définitions

Comme dans le cas des fonctions d'une variable, on travaille dans des ensembles particuliers, appelés ouverts (se rappeler la raison de ceci [2] !) : une partie Ω de $\mathbb{R}^2$ est appelée un ouvert si tout point de Ω est le centre d'un rectangle qui reste inclus dans Ω.

Définition 3.2.2. *Soit f une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ et soit $(x_0, y_0) \in \Omega$.*

a) La fonction f est dérivable par rapport à sa première variable x en (x_0, y_0) si la limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

existe et est finie. Dans ce cas, cette limite est appelée dérivée partielle de f par rapport à x au point (x_0, y_0) et est notée

$$D_x f(x_0, y_0) \quad \text{ou encore} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \textit{ou encore } D_1 f(x_0, y_0).$$

Remarquons que les expressions

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

et

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

signifient exactement la même chose (elles ne diffèrent que par les notations utilisées).

b) La fonction f est dérivable par rapport à sa deuxième variable y en (x_0, y_0) si la limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

existe et est finie. Dans ce cas, cette limite est appelée dérivée partielle de f par rapport à y au point (x_0, y_0) et est notée

$$D_y f(x_0, y_0) \quad \textit{ou encore} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \textit{ou encore } D_2 f(x_0, y_0).$$

Comme ci-dessus, notons que les expressions

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

et

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

signifient exactement la même chose (elles ne diffèrent que par les notations utilisées).

c) la fonction f est dérivable sur (ou dans) Ω si elle est dérivable par rapport à x et par rapport à y en tout point de Ω.

2. La définition de la dérivabilité en un point x_0 demande de considérer la valeur de la fonction en $x_0 + h$ (h réel positif ou négatif, proche de 0) ; il est donc indispensable que l'on puisse évaluer la fonction en ces points, ce qui n'est possible que si x_0 est dans un intervalle ouvert

Définition 3.2.3. *Soit f défini sur $A \subset \mathbb{R}^2$. Le domaine de dérivabilité de f est le plus grand ouvert inclus dans A tel que f soit dérivable en tout point de cet ouvert.*

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, la notation

$$C_1(\Omega)$$

désigne l'ensemble des fonctions dérivables dans Ω dont les dérivées partielles sont continues dans Ω. Un élément de cet ensemble s'appelle une fonction continûment dérivable dans (sur) Ω.

Bien sûr ces définitions se généralisent de façon tout à fait naturelle pour les fonctions de plus de deux variables !

Notons aussi que pour bien lever toute ambiguïté, on utilise fréquemment des parenthèses supplémentaires : par exemple la valeur de la dérivée de f par rapport à sa première variable au point (s,t) sera notée

$$(D_1 f)(s,t).$$

PROPRIÉTÉS

Les propriétés relatives aux combinaisons linéaires, produits, quotients sont analogues à celles rencontrées dans le cadre des fonctions d'une variable réelle. La propriété concernant la dérivabilité et l'expression des dérivées partielles des fonctions composées est un peu plus complexe. Nous admettrons ce résultat sans démonstration.

Proposition 3.2.4. *a) Soient*
- f une fonction de deux variables réelles continûment dérivable sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$,
- f_1, f_2 deux fonctions d'une variable réelle dérivables sur un ouvert J de $\mathbb{R}$.
Alors la fonction définie par

$$F(t) = f(f_1(t), f_2(t))$$

est dérivable sur $I = \{t \in J : (f_1(t), f_2(t)) \in U\}$ et on a

$$DF(t) \ = \ D_1 f(X,Y)\, Df_1(t) \ + \ D_2 f(X,Y)\, Df_2(t)$$

avec $t \in I$ et $X = f_1(t)$, $Y = f_2(t)$.

b) Soient
- f une fonction de deux variables réelles continûment dérivable sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$,
- f_1, f_2 deux fonctions de deux variables réelles dérivables sur un ouvert V de $\mathbb{R}^2$.
Alors la fonction définie par

$$F(x,y) = f(f_1(x,y), f_2(x,y))$$

est dérivable sur $\Omega = \{(x,y) \in V : (f_1(x,y), f_2(x,y)) \in U\}$ et on a

$$D_1 F(x,y) \ = \ D_1 f(X,Y)\, D_1 f_1(x,y) \ + \ D_2 f(X,Y)\, D_1 f_2(x,y)$$

$$D_2 F(x,y) \ = \ D_1 f(X,Y)\, D_2 f_1(x,y) \ + \ D_2 f(X,Y)\, D_2 f_2(x,y)$$

avec $(x,y) \in \Omega$ et $X = f_1(x,y)$, $Y = f_2(x,y)$.

c) Soient
- f une fonction d'une variable réelle dérivable sur un ouvert I de $\mathbb{R}$,
- g une fonction de deux variables réelles dérivable sur l'ouvert V de $\mathbb{R}^2$.
Alors la fonction définie par

$$F(x,y) = f(g(x,y))$$

est dérivable sur $\Omega = \{(x,y) \in V : g(x,y) \in I\}$ *et on a*

$$\begin{aligned} D_1F(x,y) &= Df(X)\, D_1g(x,y) \\ D_2F(x,y) &= Df(X)\, D_2g(x,y) \end{aligned}$$

avec $(x,y) \in \Omega$ *et* $X = g(x,y)$.

d) On a bien sûr des résultats analogues pour des fonctions du type $f(f_1, \ldots, f_n)$ *avec* f *fonction de* n *variables et* $f_1, \ldots, f_n$ *fonctions de* p *variables, à valeurs réelles.*

Remarque. Pour avoir la dérivabilité de la fonction composée ET l'expression explicite des dérivées présentées dans le résultat précédent, il importe de bien vérifier les hypothèses.
• Il faut remarquer la différence d'hypothèse. En effet, lorsque la fonction f est une fonction d'une variable réelle, on obtient un résultat beaucoup plus fort : la dérivabilité de la fonction composée est obtenue en supposant f seulement dérivable alors qu'on suppose f continûment dérivable dans le cas où il s'agit d'une fonction de plusieurs variables. Ceci n'est pas une faiblesse de la démonstration (des exemples l'attestent).
• De même, il se peut que la fonction composée soit dérivable mais qu'on ne puisse pas utiliser la ≪ formule ≫ de dérivation des fonctions composées pour trouver la dérivée, des exemples l'attestent.

Voici un exemple.

Soit la fonction F *définie explicitement par* $F(t) = f\left(\ln(t-1), \sqrt{t^2-1}\right)$ *avec* f *continûment dérivable dans* $U =]0,+\infty[\times]4,+\infty[$. *On demande où elle est dérivable et l'expression de sa dérivée.*

La fonction $t \mapsto \ln(t-1)$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ et la fonction $t \mapsto \sqrt{t^2-1}$ est dérivable sur $\{t \in \mathbb{R} : t^2 > 1\} =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$. L'intersection des domaines de dérivabilité de ces deux fonctions est donc $]1,+\infty[$. Vu la proposition précédente, la fonction F est donc dérivable sur

$$\left\{t \in]1,+\infty[\; : \; \ln(t-1) \in]0,+\infty[\quad \text{et} \quad \sqrt{t^2-1} \in]4,+\infty[\right\}.$$

On a $\ln(t-1) \in]0,+\infty[$ si et seulement si $t-1 > 1$ et on a $\sqrt{t^2-1} \in]4,+\infty[$ si et seulement si $t^2-1 > 16$. Les deux conditions sur t sont donc

$$\begin{cases} t > 2 \\ |t| > \sqrt{17}, \end{cases}$$

ce qui donne $t > \sqrt{17}$. La fonction F est donc dérivable sur $]\sqrt{17},+\infty[$ et pour tout t dans cet intervalle, on a

$$DF(t) = \frac{D_1f(X,Y)}{t-1} + \frac{tD_2f(X,Y)}{\sqrt{t^2-1}}$$

avec $X = \ln(t-1)$ et $Y = \sqrt{t^2-1}$.

3.2.3 Lien entre dérivabilité et continuité

Dans le cas des fonctions d'une variable réelle, on a démontré qu'une fonction dérivable est toujours continue. Ce résultat n'est plus vrai dans le cas des fonctions de plusieurs variables réelles (des exemples permettent de le montrer). Néanmoins on démontre que *si une fonction est continûment dérivable sur un ouvert* Ω *de* $\mathbb{R}^2$ *alors cette fonction y est continue.*

3.2.4 Dérivées multiples

Comme dans le cas des fonctions d'une variable réelle, on peut se demander si les dérivées d'ordre 1 (c'est-à-dire les dérivées partielles) sont encore dérivables. Comme on est dans le cadre de plusieurs variables, plusieurs dérivées secondes vont apparaître. Par exemple, si f est une fonction dérivable de deux variables réelles, on se pose la question de savoir si les fonctions (de deux variables réelles)

$$D_1 f, \quad D_2 f$$

sont encore dérivables. Si c'est le cas, on introduit alors les fonctions dérivées d'ordre deux

$$D_1D_1f = D_1^2 f,\ D_2D_1f,\ D_2D_2f = D_2^2 f,\ D_1D_2f.$$

Dans beaucoup de cas, on a $D_1D_2f = D_2D_1f$ mais pas toujours ! Néanmoins on démontre que cette égalité est correcte si la fonction est deux fois continûment dérivable.

On introduit de manière analogue les dérivées d'ordre p pour tout naturel p.

On a aussi la propriété suivante : *Si, dans les énoncés de la Proposition (3.2.4), les fonctions sont q fois continûment dérivables, alors la fonction composée est aussi q fois continûment dérivable.*

3.2.5 Des opérateurs de dérivation fort utiles

En physique (notamment), les opérateurs de dérivation appelés

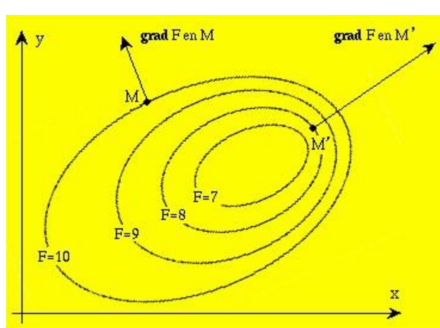
gradient, divergence, rotationnel

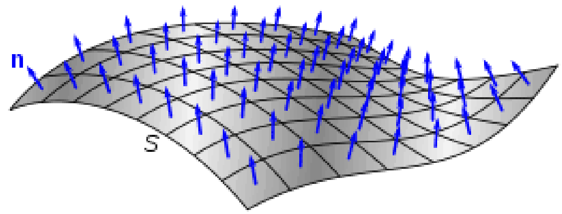
apparaissent à de multiples endroits, comme outils de modélisation de divers phénomènes (flux au travers de parois, équations de Maxwell en électromagnétisme, équation de la chaleur, des ondes, ...). Il s'agit d'*opérateurs faisant intervenir des dérivées partielles* et les équations impliquant celles-ci sont des cas particuliers *d'équations aux dérivées partielles*, lesquelles sont aux fonctions de plusieurs variables ce que sont les équations différentielles aux fonctions d'une variable réelle.

Donnons simplement ici la définition de l'opérateur gradient : si f est une fonction dérivable dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ alors le gradient de f est la fonction à valeurs vectorielles

$$grad\, f \ :\ x \in \mathbb{R}^n \mapsto\ (D_1f(x), \ldots, D_nf(x)).$$

Dans le cas de deux variables ($n = 2$), cas régulier (c'est-à-dire qu'on a la dérivabilité requise), le gradient en un point est un vecteur orthogonal à la tangente à la courbe d'équation $f(x, y) = 0$ en ce point. Dans le cas de trois variables ($n = 3$), cas régulier (c'est-à-dire qu'on a la dérivabilité requise) le gradient en un point est un vecteur orthogonal au plan tangent à la surface d'équation $f(x, y, z) = 0$ en ce point. Lorsque $n = 2$ et que la courbe est le graphique d'une fonction g (c'est-à-dire $f(x, y) = y-g(x)$), cela se justifie aisément : les composantes d'un vecteur directeur de la tangente au point du graphique d'abscisse x est $(1, Dg(x))$; le gradient de f dans ce cas est $(D_1f(x, y), D_2f(x, y)) = (-Dg(x), 1)$; et on a bien l'orthogonalité des vecteurs de composantes $(-Dg(x), 1)$ et $(1, Dg(x))$.





3.2.6 La dérivée directionnelle

En analyse mathématique, la notion de dérivée directionnelle permet de quantifier la variation locale d'une fonction dépendant de plusieurs variables, en un point donné et le long d'une direction donnée dans l'espace de ces variables. Dans la version la plus simple, la dérivée directionnelle généralise la notion de dérivées partielles : on les retrouve en prenant comme directions de dérivation les axes de coordonnées.

Voici la définition et une propriété qui relie cette dérivée aux dérivées partielles.

Définition 3.2.5. *Cas de deux variables. Soit f une fonction définie dans un ouvert de $\mathbb{R}^2$, soit un point (x_0, y_0) de cet ouvert et soit un vecteur non nul de composantes (a, b). On dit que f admet une dérivée dans la direction (a, b) au point (x_0, y_0) si la limite suivante existe et est finie*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + ta, y_0 + tb) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Si on pose $u = (a, b)$, on utilise fréquemment la notation $D_u f(x_0, y_0)$ pour désigner la valeur de cette limite et on l'appelle la dérivée directionnelle en (x_0, y_0) dans la direction u.

Cas de trois variables. Soit f une fonction définie dans un ouvert de $\mathbb{R}^3$, soit un point (x_0, y_0, z_0) de cet ouvert et soit un vecteur non nul de composantes (a, b, c). On dit que f admet une dérivée dans la direction (a, b, c) au point (x_0, y_0, z_0) si la limite suivante existe et est finie

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc) - f(x_0, y_0, z_0)}{t}.$$

Si on pose $u = (a, b, c)$, on utilise fréquemment la notation $D_u f(x_0, y_0, z_0)$ pour désigner la valeur de cette limite et on l'appelle la dérivée directionnelle en (x_0, y_0, z_0) dans la direction u.

On obtient alors tout de suite un lien entre cette notion et celle des dérivées partielles (qui en sont bien sûr un cas particulier comme on le voit en prenant les vecteurs $(1, 0)$, $(0, 1)$ dans le cas de deux variables et $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ dans le cas de trois variables). Clairement, c'est la dérivation des fonctions composées qui va intervenir ici.

Proposition 3.2.6. *Cas de deux variables. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et si $f \in C_1(\Omega)$ alors la dérivée directionnelle existe en tout point (x, y) de l'ouvert en toute direction (a, b) et on a*

$$D_u f(x, y) \ = \ D_1 f(x, y)\, a \ + \ D_2 f(x, y)\, b.$$

Cas de trois variables. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et si $f \in C_1(\Omega)$ alors la dérivée directionnelle existe en tout point (x, y, z) de l'ouvert en toute direction (a, b, c) et on a

$$D_u f(x, y, z) \ = \ D_1 f(x, y, z)\, a \ + \ D_2 f(x, y, z)\, b \ + \ D_3 f(x, y, z)\, c.$$

Preuve. C'est une application du théorème de dérivation des fonctions composées. En effet avec

$$F(t) \ = \ f(x + ta, y + tb),$$

on a

$$\begin{aligned} D_u f(x,y) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x+ta, y+tb) - f(x,y)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{F(t)-F(0)}{t} \\ &= DF(0) \\ &= D_1 f(x,y)\, a \ + \ D_2 f(x,y)\, b. \end{aligned}$$

Avec

$$F(t) \ = \ f(x+ta, y+tb, z+tc),$$

on a

$$\begin{aligned} D_u f(x,y,z) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x+ta, y+tb, z+tc) - f(x,y,z)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{F(t)-F(0)}{t} \\ &= DF(0) \\ &= D_1 f(x,y,z)\, a \ + \ D_2 f(x,y,z)\, b \ + \ D_3 f(x,y,z)\, c. \end{aligned}$$

□

Une question qui se pose de façon naturelle dans les modélisations, quand f représente une grandeur, une quantité ..., est de savoir dans quelle direction cette grandeur, quantité croît ou décroît le plus vite en un point donné. Autrement dit, on se demande quelle est la direction u pour laquelle $D_u f(x,y)$ (resp. $D_u f(x,y,z)$) est la plus grande ou la plus petite (on examine en fait la « vitesse » de variation de f dans une direction).

La propriété suivante [3] va permettre de répondre à la question.

Propriété(s) 3.2.7. *Pour tous points (a,b), (x,y) de $\mathbb{R}^2$, on a*

$$|ax+by| \ \leq \ \sqrt{a^2+b^2}\ \sqrt{x^2+y^2},$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si (a,b) est multiple de (x,y) ou (x,y) est multiple de (a,b).

Pour tous points (a,b,c), (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$, on a

$$|ax+by+cz| \ \leq \ \sqrt{a^2+b^2+c^2}\ \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si (a,b,c) est multiple de (x,y,z) ou (x,y,z) est multiple de (a,b,c).

Preuve. On l'obtient directement par le calcul.□

Revenons maintenant au cas qui nous occupe. Que ce soit dans le cas de deux ou trois variables, en supposant que le gradient de f en (x,y) (resp. en (x,y,z)) n'est pas nul, les expressions

$$D_u f(x,y) = D_1 f(x,y)\, a \ + \ D_2 f(x,y)\, b$$

$$D_u f(x,y,z) = D_1 f(x,y,z)\, a \ + \ D_2 f(x,y,z)\, b \ + \ D_3 f(x,y,z)\, c$$

sont donc bien extrémales lorsque (a,b) (resp. (a,b,c)) est un multiple du gradient de f en (x,y) (resp. (x,y,z)). Si a^2+b^2 (resp. $a^2+b^2+c^2$) vaut 1, les valeurs extrémales sont la norme (longueur) du gradient de f en (x,y) (resp. en (x,y,z)) et son opposé.

3. Cette propriété est un cas particulier de ce que l'on appelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz, dont l'interprétation est claire avec la définition géométrique du produit scalaire.

3.3 Extrema

La notion d'extremum des valeurs d'une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles fait partie des prérequis de ce cours. Nous abordons ici le tout aussi important cas des fonctions de plusieurs variables réelles, toujours à valeurs réelles. Cette matière sera approfondie par certains géographes de bloc 3, dans le cours Math2014 *Compléments de mathématique*.

Les exemples de cas où étudier les valeurs extrêmes de fonctions à valeurs réelles sont nombreux : maxima de température en fonction de l'altitude et de la pression, maxima ou minima de concentration de mélanges, pics de cas de contamination d'un virus en fonction de la vitesse de transmission et de la prise en charge médicale...

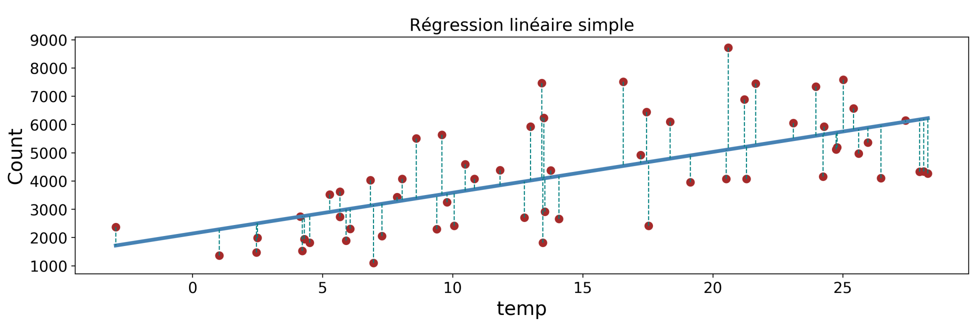
Un cas important de la recherche d'extrema est celui de la régression. Ce qui suit (en italique) est extrait de la référence [1]. *Dans le cadre d'une modélisation, on peut être amené à introduire une famille de fonctions qui dépendent de paramètres, par exemple*

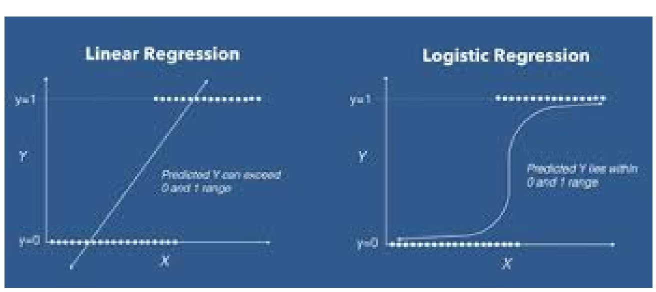
$$t \mapsto f(a,b,c,t)$$

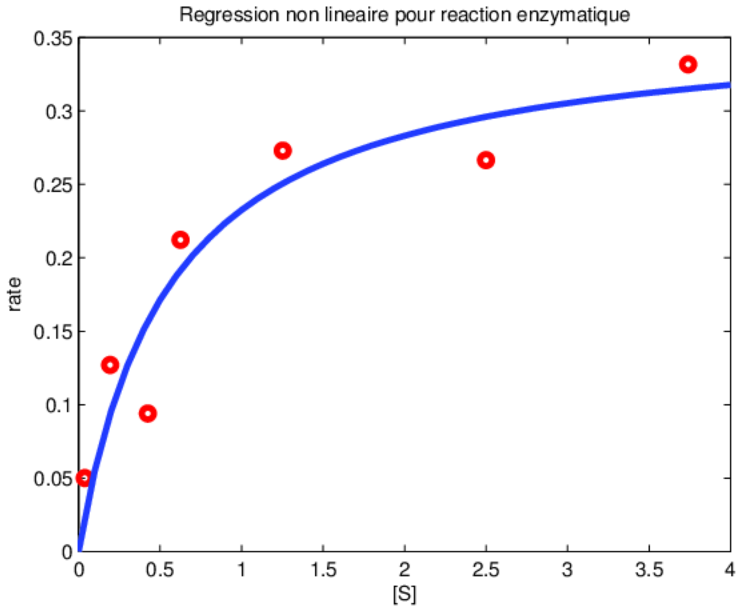
où a, b, c *sont des paramètres. On dispose par ailleurs de* n *points expérimentaux* (t_j, y_j) $(j = 1, \ldots, n)$ *et on cherche les valeurs des paramètres qui rendent minimum la « distance » (ou « écart ») entre les points du graphique de* $f(a,b,c,.)$ *et l'ensemble des points. C'est donc un problème de minimisation. Si on prend comme mesure de l'écart*

$$E(a,b,c) \;=\; \sum_{j=1}^{n} \Big(y_j - f(a,b,c,t_j)\Big)^2,$$

c'est la méthode des moindres carrés. D'autres mesures de l'écart sont bien sûr possibles. Dans le cas de deux paramètres et de la fonction $f \;:\; t \mapsto at + b$, on parle de régression linéaire et dans ce cas la droite d'équation $y = at + b$ s'appelle alors la droite de régression.







Commençons par donner quelques définitions et une propriété importante, tout cela étant une simple généralisation du cas d'une variable. Dans les présentes notes, nous ne présenterons que le cas de deux variables.

Définition 3.3.1. *Soit f une fonction de deux variables réelles définie dans $A \subset \mathbb{R}^2$, à valeurs réelles.*

• *La fonction f admet un minimum (resp. maximum) local en $(x_0, y_0) \in A$ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$f(x,y) \geq f(x_0,y_0) \text{ (resp. } f(x,y) \leq f(x_0,y_0)) \ \forall (x,y) \in A : |x - x_0| \leq \varepsilon \text{ et } |y - y_0| \leq \varepsilon.$$

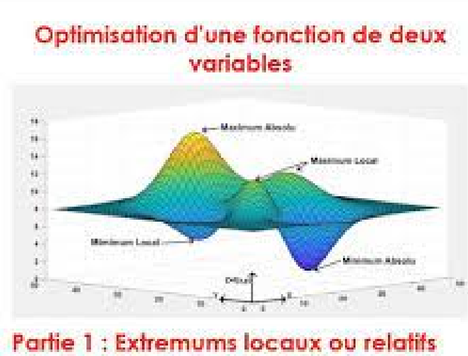
• *La fonction f admet une minimum (resp. maximum) global en $(x_0, y_0) \in A$ si*

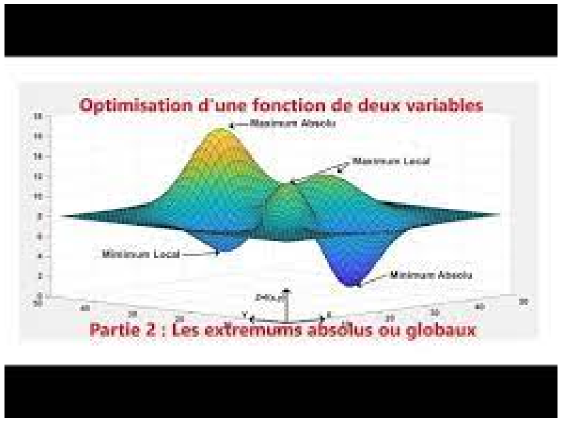
$$f(x,y) \geq f(x_0,y_0) \text{ (resp. } f(x,y) \leq f(x_0,y_0)) \ \forall (x,y) \in A.$$

• *Lorsque les inégalités entre les valeurs de la fonction sont strictes sauf en (x_0, y_0) bien sûr, on parle de minimum et de maximum strict (local ou global).*

• *Si A est ouvert et si f est dérivable dans A, on appelle point stationnaire de f dans A tout point de A qui annule les deux dérivées partielles de f.*

Comme dans le cas d'une variable, on appelle *extremum* un minimum ou un maximum.





Et voici la propriété qui montre que dans la recherche des extrema d'une fonction dérivable, on ne doit s'intéresser qu'aux points stationnaires. La preuve est tout à fait analogue au cas d'une variable.

Propriété(s) 3.3.2. *Tout extremum local d'une fonction dérivable dans un ouvert est un point stationnaire pour cette fonction.*

Cela étant si la recherche d'extrema d'une fonction d'une variable qui est deux fois dérivable est directe par étude des deux premières dérivées, il n'en est plus de même dans le cas d'une fonction de deux variables. De fait, le développement limité de Taylor d'une fonction deux fois continûment dérivable est plus complexe bien que toujours très naturel : il fait intervenir **toutes** les dérivées partielles secondes, donc ici la somme de trois termes et non plus un seul terme comme dans le cas d'une variable. L'étude du signe de cette somme de trois termes est donc plus ardue. Cette étude fait en fait appel à du calcul matriciel, et plus précisément aux propriétés des matrices symétriques réelles. Cette matière fait partie du cours MATH2014.

Introduisons le résultat qui suit (conditions suffisantes pour qu'un point stationnaire soit extremum) en expliquant son utilité pour la recherche des extrema.

Le développement limité de Taylor à l'ordre deux pour une fonction de deux variables réelles deux fois continûment dérivable dans un ouvert du plan s'énonce comme suit : *Pour tous points (x_0, y_0), (x, y) de cet ouvert qui sont tels que les points du segment qui les relie appartiennent encore à l'ouvert, il existe un point (u_0, v_0) de ce segment tel que*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0) + (x-x_0)D_1f(x_0,y_0) + (y-y_0)D_2f(x_0,y_0) \\ &\quad + \frac{(x-x_0)^2}{2}D_1^2f(u_0,v_0) + (x-x_0)(y-y_0)D_1D_2f(u_0,v_0) + \frac{(x-y_0)^2}{2}D_2^2f(u_0,v_0). \end{aligned}$$

Si (x_0, y_0) est un point stationnaire, on obtient

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2}D_1^2f(u_0,v_0) + (x-x_0)(y-y_0)D_1D_2f(u_0,v_0) + \frac{(x-y_0)^2}{2}D_2^2f(u_0,v_0).$$

L'étude du signe de la somme des trois derniers termes permet alors bien sûr d'obtenir des résultats concernant le caractère extremal de (x_0, y_0). Il se fait que cette somme peut s'écrire sous la forme d'un produit matriciel du type $\widetilde{X}HX$ où X est un vecteur colonne de dimension deux et H une matrice symétrique réelle (matrice hessienne de f) de dimension deux.

Définition 3.3.3. *Soient un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ et une fonction $f \in C_2(\Omega)$, à valeurs réelles. La matrice hessienne de f est la matrice H_f définie en tout point (x, y) de Ω par*

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} D_1^2f(x,y) & D_2D_1f(x,y) \\ D_1D_2f(x,y) & D_2^2f(x,y) \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est effectivement symétrique car comme f est deux fois continûment dérivable dans Ω, on a $D_2D_1f(x,y) = D_1D_2f(x,y)$.

Cela étant, on a le résultat suivant.

Proposition 3.3.4 (Conditions suffisantes pour qu'un point stationnaire soit extremum.). *Soient un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, une fonction $f \in C_2(\Omega)$ à valeurs réelles et un point (x_0, y_0) appartenant à Ω, stationnaire pour f.*

(1) Si $\det H_f(x_0, y_0) > 0$ et si $D_1^2 f(x_0, y_0)$ est un réel strictement positif, alors f possède un minimum local strict en (x_0, y_0).

(2) Si $\det H_f(x_0, y_0) > 0$ et si $D_1^2 f(x_0, y_0)$ est un réel strictement négatif, alors f possède un maximum local strict en (x_0, y_0).

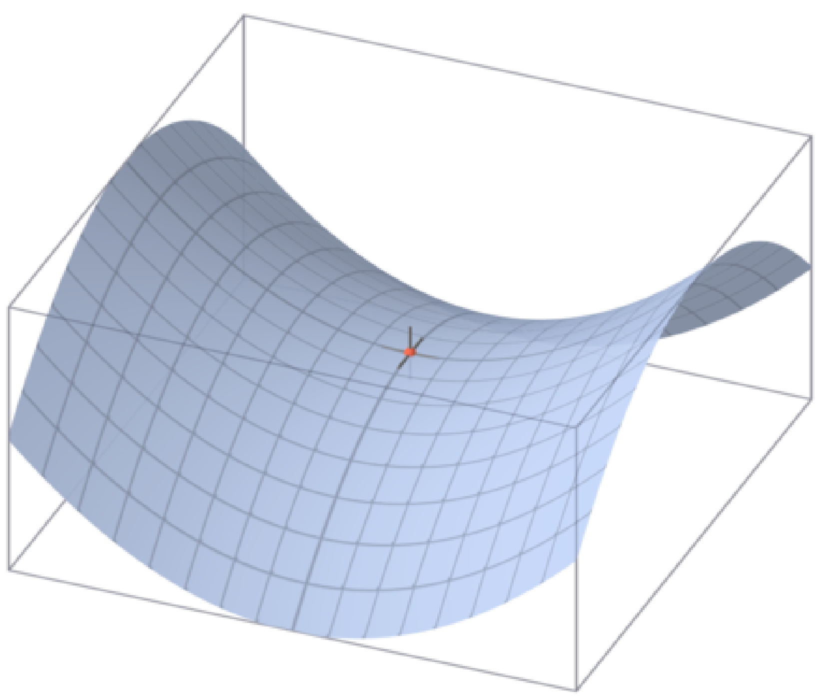
(3) Si $\det H_f(x_0, y_0) < 0$ alors f ne possède pas d'extremum en (x_0, y_0).

Considérons quelques exemples.

La fonction $f(x,y) = x^2 - y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}^2$ et est à valeurs réelles. Sa représentation graphique est la surface d'équation cartésienne $z = x^2 - y^2$; il s'agit donc d'un paraboloïde hyperbolique (voir la partie consacrée aux quadriques). Le seul point stationnaire de f est l'origine ; la matrice hessienne de f est constante (c'est bien sûr le cas pour toutes les fonctions polynomiales de degré 2) et est

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice est égal à -4 et le point stationnaire n'est donc pas un extremum. On parle de « point selle », car la forme de la surface autour de ce point ressemble à une selle de cheval. On aurait d'ailleurs pu voir tout de suite (à savoir sans passer par la matrice hessienne) que l'origine n'est pas un extremum. En effet, on a $f(x,0) = x^2 \geq 0 = f(0,0)$ pour tout x et $f(0,y) = -y^2 \leq 0 = f(0,0)$ pour tout y.



La fonction $f(x,y) = x^2-2xy+y^3/3-3y,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ est indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}^2$ et est à valeurs réelles. Cherchons-en les points stationnaires. On a

$$D_1 f(x,y) = 2x - 2y \quad \text{et} \quad D_2 f(x,y) = -2x + y^2 - 3$$

donc

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{l} D_1 f(x,y) = 0 \\ D_2 f(x,y) = 0 \end{array}\right. \quad & \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = y \\ y^2 - 2y - 3 = 0 \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = y \\ (y+1)(y-3) = 0 \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow \quad x = y = -1 \ \text{ ou } \ x = y = 3.
\end{aligned}$$

Cela étant, la matrice hessienne de f est la matrice

$$\left(\begin{array}{cc} D_1^2 f(x,y) & D_1 D_2 f(x,y) \\ D_1 D_2 f(x,y) & D_2^2 f(x,y) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 2 & -2 \\ -2 & 2y \end{array} \right).$$

Au point stationnaire $(-1,-1)$, elle est égale à

$$\left(\begin{array}{cc} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{array} \right),$$

matrice dont le déterminant est égal à -8. Ce point stationnaire n'est donc pas extremum.

Au point stationnaire $(3,3)$, elle est égale à

$$\left(\begin{array}{cc} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{array} \right),$$

matrice dont le déterminant est égal à 8. Comme la dérivée seconde de f par rapport à la première variable vaut 2 (en tout point), la fonction a un minimum local strict au point stationnaire $(3,3)$. Regardons alors si ce minimum est global. On a $f(3,3) = -9$; comme $f(0,y) = y^3/3 - 3y$, on a $\lim_{y \to -\infty} f(0,y) = -\infty$; dès lors le minimum est seulement local.

Le résultat théorique (conditions suffisantes pour avoir un extremum) ne permet pas toujours de conclure, parce que les hypothèses ne sont pas vérifiées. Par exemple il se peut que la fonction ne soit pas deux fois dérivable. Il se peut aussi que le déterminant de la matrice hessienne soit nul, ou que la dérivée seconde en la première variable soit nulle. Dans ce cas, il faut revenir à la définition des extrema.

Par exemple, pour $f(x,y) = x^4 + y^4 \ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $g(x,y) = x^3 + y^3 \ (x,y) \in \mathbb{R}^2$, le seul point stationnaire est l'origine. Mais en ce point, les dérivées secondes de f et de g sont nulles. Dès lors la matrice hessienne est nulle et on ne peut pas conclure en utilisant le résultat théorique précédent. Cependant, il est clair que f admet un minimum global strict à l'origine. Et pour g, comme on a $g(x,0) = x^3$ et $g(0,0) = 0$, l'origine n'est pas extremum étant donné que l'on a $g(x,0) = x^3 > 0$ si x est positif et $g(x,0) = x^3 < 0$ si x est négatif.

3.4 Calcul intégral

Comme la grande majorité des cas d'applications concerne des fonctions continues et vu les difficultés techniques que l'on rencontre dans le cas de fonctions non continues, dans ce chapitre nous n'envisagerons que l'intégration de <u>fonctions continues</u>.

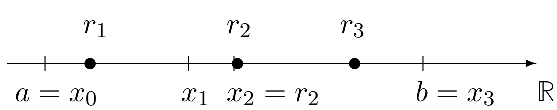
Dans le cadre des fonctions d'une variable réelle, on introduit la notion d'intégrale sur un intervalle borné fermé comme limite de sommes de Riemann obtenues à partir de découpages de l'intervalle. On étend ensuite cette notion au cas des autres intervalles.

Dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, ces notions sont plus délicates à manipuler car les ensembles sur lesquels on voudrait intégrer se présentent géométriquement de manière beaucoup plus complexe.

Afin de ne pas alourdir la présentation, nous ne considérerons (dans un premier temps) que le cas de fonctions de deux variables. Un développement analogue pourrait être fait dans le cas de fonctions de plus de deux variables mais les représentations géométriques et analytiques sont alors beaucoup plus lourdes à manipuler.

3.4.1 Intégration sur des rectangles

Pour rappel, à une variable, on considére un découpage de $[a, b]$ et, dans chacun des sous-intervalles ainsi déterminés, on prend un réel. On construit de la sorte des ≪ sommes de Riemann ≫.



$$\text{Sous-intervalles : } [a, x_1],\ [x_1, x_2],\ [x_2, b],$$

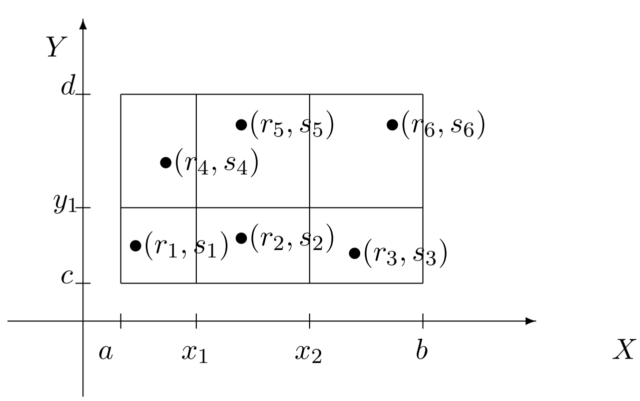
$$\text{réels dans les sous-intervalles : } r_1 \in [a, x_1],\ r_2 \in [x_1, x_2],\ r_3 \in [x_2, b].$$

Somme de Riemann associée à ce découpage :

$$\sum_{k=1}^{3} f(r_k)(x_k - x_{k-1}) = f(r_1)(x_1 - a) + f(r_2)(x_2 - x_1) + f(r_3)(b - x_2).$$

(Lorsque f est à valeurs positives, cette somme représente une somme d'aires de rectangles.) On considère alors des suites de découpages dont la largeur tend vers 0 (cf le rappel consacré au calcul intégral à une variable).

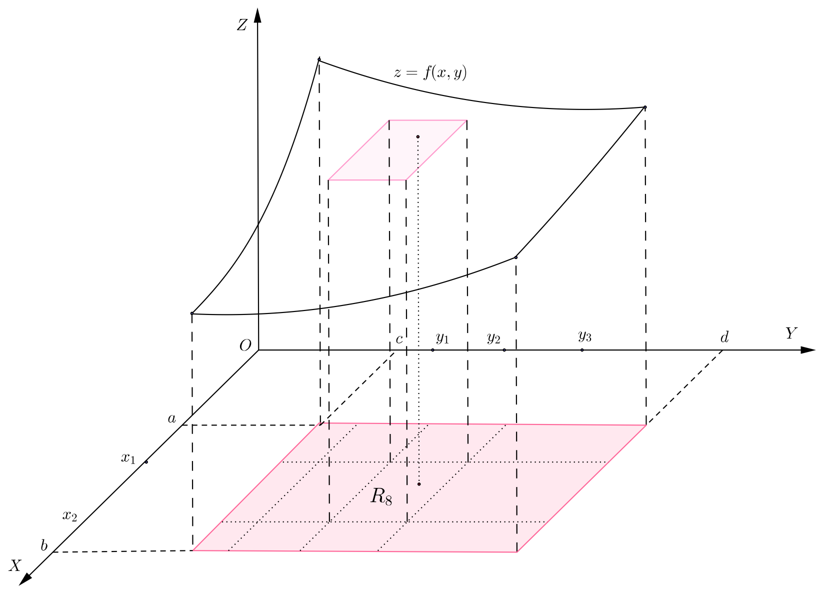
Dans le cas de deux variables, on procède comme dans le cas d'une variable mais à partir d'un rectangle R borné fermé $[a, b] \times [c, d]$. On considère aussi des sous-rectangles, construits à partir de découpages des intervalles $[a, b]$ et $[c, d]$, et dans chacun d'eux, on considère un point.



Dans cet exemple, on a donc découpé le rectangle R en six sous-rectangles $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$ dans lesquels on a choisi chaque fois un point. Si on désigne par Δ_k l'aire du rectangle R_k, la somme de Riemann associée à ce découpage est

$$\sum_{k=1}^{6} f(r_k, s_k)\Delta_k.$$

Lorsque la fonction f est à valeurs positives, cette somme représente une somme de volumes de parallélépipèdes.



On note d la borne supérieure des longueurs des diagonales des sous-rectangles.

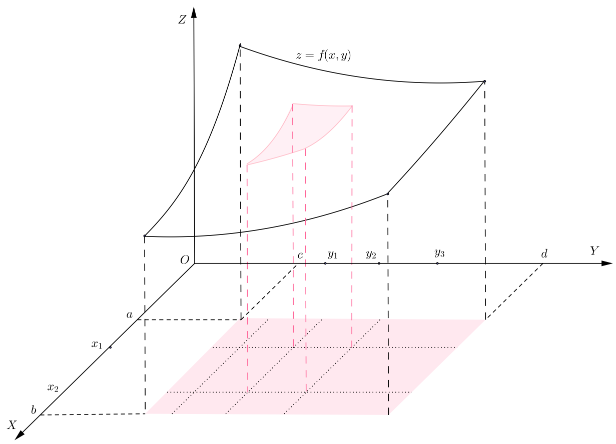
Comme dans le cas d'une variable, on considère des suites de découpages. Lorsque l'on construit une suite de découpages de R en rectangles telle que la suite associée d_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ converge vers 0, on examine ici encore le comportement de la suite S_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ des sommes de Riemann. **On peut démontrer que la suite S_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ converge vers une limite finie et que cette limite est indépendante de la suite de découpages qui a servi à la définir.**

On dit que f est intégrable sur le rectangle R et que son intégrale sur le rectangle R est la limite de la suite S_n $(n \in \mathbb{N}_0)$. L'intégrale de f sur R est notée

$$\iint_R f(x,y)\ dxdy \quad \text{ou} \quad \iint_R f(x,y)\ dydx.$$

Tout comme dans le cas d'une variable, vu l'interprétation géométrique de ces sommes, on définit le volume du corps compris sous la surface d'équation $z = f(x,y),\ (x,y) \in R$ (où f est supposé à valeurs positives) par

$$V = \iint_R f(x,y)dxdy.$$



Une propriété très utile pour le calcul des intégrales multiples est la suivante (elle permet de se ramener à des calculs d'intégrales d'une variable). Nous l'admettrons sans démonstration.

Géométriquement, elle a une interprétation claire : le volume du corps situé « sous » la surface d'équation $z = f(x, y)$ est la superposition de l'aire des surfaces obtenues en coupant le volume par une succession de plans orthogonaux à X (ou à Y).

Proposition 3.4.1. *Soit f une fonction continue sur le rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$. On a*

$$\iint_R f(x,y)\ dx\ dy \ = \ \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ dy \right)\ dx$$

et

$$\iint_R f(x,y)\ dx\ dy \ = \ \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\ dx \right)\ dy.$$

On dit que l'on peut permuter l'ordre d'intégration sans changer la valeur de l'intégrale.

Prenons un exemple : on demande de calculer l'intégrale de la fonction f définie explicitement par $f(x, y) = \sin(x + y)$ sur le rectangle $R = [0, \pi/2] \times [-\pi, 0]$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$ donc elle est intégrable sur le rectangle fermé borné. Cela étant, on a successivement

$$\begin{aligned}
\iint_R \sin(x+y)\ dx\, dy &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_{-\pi}^0 \sin(x+y)\ dy \right)\ dx \\
&= -\int_0^{\pi/2} \left(\int_{-\pi}^0 D_y(\cos(x+y))\ dy \right)\ dx \\
&= -\int_0^{\pi/2} \Big(\cos(x) - \cos(x-\pi) \Big)\ dx \\
&= -2 \int_0^{\pi/2} \cos(x)\ dx \\
&= -2 \int_0^{\pi/2} D\sin(x)\ dx \\
&= -2\left(\sin(\pi/2) - \sin(0)\right) \ = \ -2.
\end{aligned}$$

Propriété(s) 3.4.2. *Cas des variables séparées : si $R = [a,b] \times [c,d]$ et si $f(x,y) = f_1(x)\ f_2(y)$ avec f_1 continu sur $[a,b]$ et f_2 continu sur $[c,d]$, alors la fonction f est intégrable sur le rectangle R et on a*

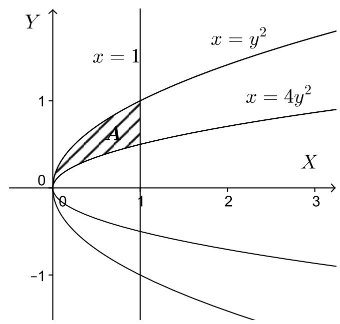
$$\iint_R f_1(x) f_2(y)\ dx\ dy \ = \ \left(\int_a^b f_1(x)\ dx\right) \ \left(\int_c^d f_2(y)\ dy\right).$$

Preuve. C'est direct par le calcul.$\square$

3.4.2 Description d'ensembles

Permuter l'ordre d'intégration dans le cas des rectangles ne pose aucun problème puisque les coordonnées varient dans des ensembles fixes. Par contre, dans le cas d'intégration sur un ensemble plus général, il est clair que la permutation ne se fera pas sans un traitement préalable de la description de l'ensemble. Cela demandera de pouvoir passer d'une représentation géométrique à une représentation ou description analytique (c'est-à-dire à l'aide des composantes), et vice-versa.

Ainsi par exemple, l'ensemble hachuré dans la figure ci-dessous



a les descriptions analytiques suivantes

$$A \ = \ \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1] \text{ et } y \in \left[\sqrt{x}/2, \sqrt{x}\ \right]\right\}$$

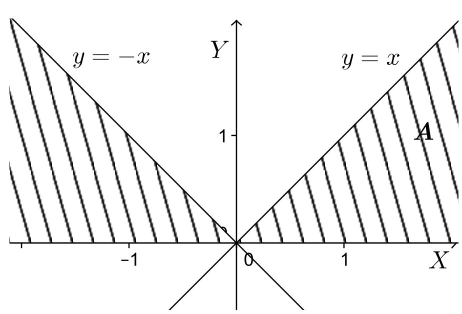
et

$$A \ = \ \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1/2] \text{ et } x \in \left[y^2, 4y^2\right]\right\} \ \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [1/2,1] \text{ et } x \in \left[y^2, 1\right]\right\}.$$

Cela étant, l'ensemble décrit analytiquement par

$$A \ = \ \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \geq 0,\ y \geq 0\right\}$$

se représente comme suit dans un repère orthonormé



On est ainsi aidé pour obtenir une définition plus précise de A, à savoir celle qui isole d'abord les abscisses et donne l'ensemble de variation des ordonnées en fonction des abscisses, puis le contraire. On obtient

$$A \;=\; \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} \text{ et } 0 \leq y \leq |x|\right\}$$

et

$$A \;=\; \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \text{ et } x \leq -y\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \text{ et } x \geq y\right\}.$$

3.4.3 Intégration sur certains ensembles bornés fermés

Une définition analogue de l'intégrale d'une fonction continue sur des ensembles qui sont seulement bornés fermés peut aussi être faite. Nous nous contenterons ici de donner des résultats pratiques concernant l'intégration sur des ensembles particuliers mais qui recouvrent la plupart des cas pratiques.

Définition 3.4.3. *Soit A un sous-ensemble borné fermé du plan.*

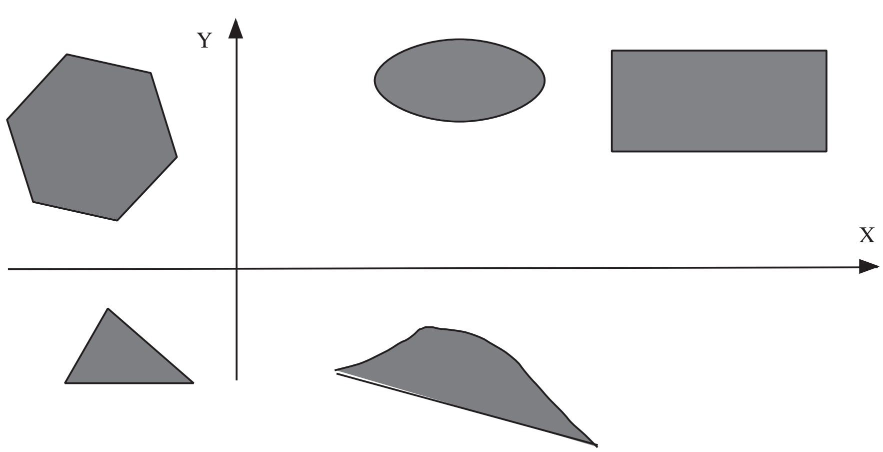
a) On dit que A est parallèle à l'axe Y s'il existe deux fonctions f_1, f_2 continues sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ telles que $f_1 \leq f_2$ sur $[a,b]$ et telles que

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; a \leq x \leq b,\; f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}.$$

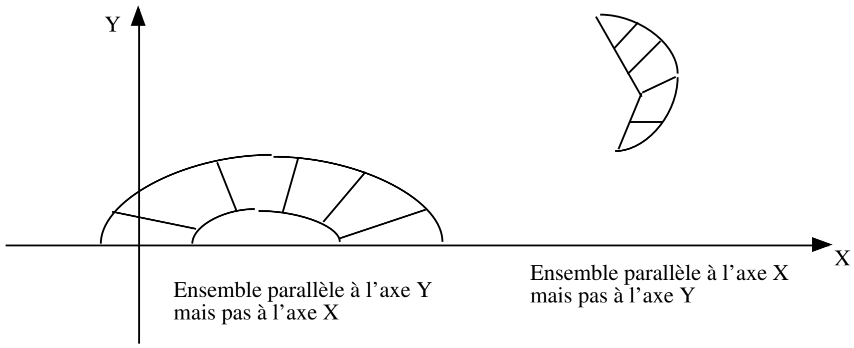
b) On dit que A est parallèle à l'axe X s'il existe deux fonctions g_1, g_2 continues sur un intervalle $[c,d]$ de $\mathbb{R}$ telles que $g_1 \leq g_2$ sur $[c,d]$ et telles que

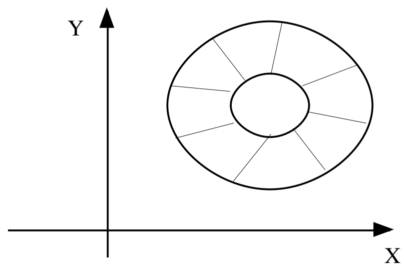
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; g_1(y) \leq x \leq g_2(y),\; c \leq y \leq d\}.$$

Comment reconnaître géométriquement de tels ensembles dans les cas usuels ?
- Un ensemble est parallèle à l'axe Y lorsque toute droite verticale intersecte sa frontière au plus deux fois, exception faite des droites verticales qui composent elles-mêmes éventuellement la frontière,
- un ensemble est parallèle à l'axe X lorsque toute droite horizontale intersecte sa frontière au plus deux fois, exception faite des droites horizontales qui composent elles-mêmes éventuellement la frontière.



Ensembles parallèles à l'axe X et à l'axe Y





Ensemble non parallèle à l'axe X, non parallèle à l'axe Y

Le résultat suivant donne une manière de calculer les intégrales sur des ensembles de ce type.

Proposition 3.4.4. *Soit f une fonction continue sur un ensemble A parallèle à l'axe X ou à l'axe Y. Alors f est intégrable sur A et on a*

$$\iint_A f(x,y)\ dxdy \ = \ \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy \right)\ dx$$

si A est parallèle à l'axe Y et

$$\iint_A f(x,y)\ dxdy \ = \ \int_c^d \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx \right)\ dy$$

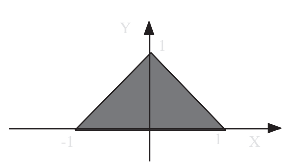
si A est parallèle à l'axe X.

Remarquons que si A est à la fois parallèle à l'axe Y et à l'axe X, on a

$$\begin{aligned}\iint_A f(x,y)\ dxdy \ &= \ \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy \right)\ dx \\ &= \ \int_c^d \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx \right)\ dy.\end{aligned}$$

On dit que l'on peut *permuter l'ordre d'intégration sans changer la valeur de l'intégrale.*

Par exemple, intégrons la fonction $(x,y) \mapsto f(x,y) = y$, continue sur $\mathbb{R}^2$, sur l'ensemble suivant.



Cet ensemble est fermé et borné, à la fois parallèle à l'axe X et Y. Posons

$$f_1(x) = 0 \ (x \in [-1,1]), \ f_2(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \in [-1,0] \\ 1-x & \text{si } x \in [0,1] \end{cases}$$

et

$$g_1(y) = y-1 \ (y \in [0,1]), \ g_2(y) = 1-y \ (y \in [0,1]).$$

Les fonctions f_1, f_2 sont continues sur $[-1,1]$; les fonctions g_1, g_2 sont continues sur $[0,1]$. On a

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, \ f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, \ g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}.$$

Dès lors, comme f est continu sur A, on a

$$\begin{aligned}
\int\int_A f(x,y)\ dxdy &= \int_{-1}^{1} \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} y\ dy \right)\ dx \\
&= \int_{-1}^{0} \left(\int_{0}^{x+1} y\ dy \right)\ dx \ + \int_{0}^{1} \left(\int_{0}^{1-x} y\ dy \right)\ dx \\
&= \int_{-1}^{0} \frac{(x+1)^2}{2}\ dx + \int_{0}^{1} \frac{(1-x)^2}{2} dx \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{(x+1)^3}{3} \right]_{-1}^{0} + \frac{1}{2} \left[\frac{(x-1)^3}{3} \right]_{0}^{1} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Calculons cette intégrale dans l'autre ordre. On a

$$\begin{aligned}
\int\int_A f(x,y)\ dxdy &= \int_{0}^{1} \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} y\ dx \right)\ dy \\
&= \int_{0}^{1} \left(\int_{y-1}^{1-y} y\ dx \right)\ dy \\
&= \int_{0}^{1} y(1-y-(y-1))\ dy \\
&= 2\int_{0}^{1} y(1-y)\ dy \\
&= 2\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_{0}^{1} \\
&= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

3.4.4 Intégration sur une union d'ensembles

Lorsqu'on doit intégrer une fonction continue sur A, avec $A = A_1 \cup A_2$, où A_1 et A_2 sont parallèles aux axes et ne se rencontrent que suivant leur frontière, on utilise la propriété suivante de l'intégrale :

$$\int\int_A f(x,y)\ dxdy \ = \int\int_{A_1} f(x,y)\ dxdy \ + \int\int_{A_2} f(x,y)\ dxdy.$$

3.4.5 Intégration par changement de variables polaires

Dans le cas de l'intégrale des fonctions de deux variables, un changement de variables va amener non plus une seule dérivée, mais plusieurs ; cela est dû au fait que les dérivées partielles interviennent. Nous ne donnerons pas ici le cas général ; nous allons uniquement présenter le cas du changement de variables en coordonnées polaires.

Rappelons que les coordonnées polaires $(r, \theta) \in]0, +\infty[\times[0, 2\pi[$ d'un point différent de l'origine et ses coordonnées cartésiennes (x, y) sont liées par les relations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & r\cos(\theta) \\ y & = & r\sin(\theta). \end{array} \right.$$

On a alors le résultat suivant, admis sans démonstration.

Théorème 3.4.5. *Soit f une fonction continue sur l'ensemble fermé borné A. Si B est le sous-ensemble de $]0, +\infty[\times[0, 2\pi[$ formé des coordonnées polaires des points de A, alors on a*

$$\iint_A f(x, y)\ dx\,dy \ = \ \iint_B f\left(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\right)\ r\ dr\,d\theta.$$

Le r qui vient multiplier la fonction dans l'intégrale de droite est le résultat du mélange des dérivées partielles des fonctions $(r, \theta) \mapsto r\cos(\theta)$ et $(r, \theta) \mapsto r\sin(\theta)$ qui intervient dans l'intégration par changement de variables. Rappelons que dans le cas d'une variable, un changement de variable donne une égalité du type

$$\int_A f(x)\ dx \ = \ \int_B f(g(t))\,Dg(t)\ dt.$$

Chapitre 4

Equations et systèmes d'équations différentielles

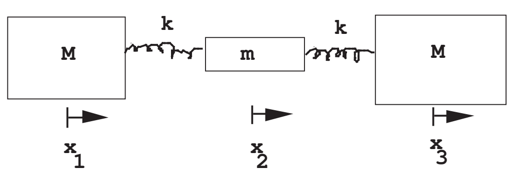
4.1 Découplage de systèmes d'équations différentielles à coefficients constants, 1

Nous allons expliquer comment la diagonalisation peut être utile dans la résolution d'équations différentielles couplées (Exemple des modes normaux de vibration).

4.1.1 Introduction

Considérons 3 masses vibrantes situées sur l'axe X (on peut voir cette situation comme celle de trois atomes vibrant entre eux). On repère les masses par leur déplacement x_1, x_2, x_3 par rapport à leur position d'équilibre. La physique indique que ce sytème est régi par les équations différentielles suivantes (t=variable temporelle, m, M, k constantes strictement positives)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} D_t^2 x_1 & = & -\frac{k}{M}(x_1 - x_2) \\ D_t^2 x_2 & = & -\frac{k}{m}(x_2 - x_1) - \frac{k}{m}(x_2 - x_3) \\ D_t^2 x_3 & = & -\frac{k}{M}(x_3 - x_2). \end{array} \right.$$



Le but est de déterminer la manière dont les masses vibrent entre elles, c'est-à-dire la forme des solutions $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$, t étant la variable temporelle.

4.1.2 Résolution

Le système précédent peut s'écrire sous la forme

$$D_t^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{k}{M} & \frac{k}{M} & 0 \\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} \\ 0 & \frac{k}{M} & -\frac{k}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Posons

$$A=\left(\begin{array}{ccc} -\frac{k}{M} & \frac{k}{M} & 0\\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m}\\ 0 & \frac{k}{M} & -\frac{k}{M}\end{array}\right).$$

Essayons de diagonaliser cette matrice (cela conduira à un découplage des équations).

En remplaçant d'abord la première colonne par la somme des trois colonnes, puis en faisant une mise en évidence et enfin en remplaçant les deuxième et troisième lignes par la différence entre ces lignes et la première, on obtient

$$\begin{aligned}
\left|\begin{array}{ccc} -\frac{k}{M}-\lambda & \frac{k}{M} & 0\\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m}-\lambda & \frac{k}{m}\\ 0 & \frac{k}{M} & -\frac{k}{M}-\lambda\end{array}\right| &= \left|\begin{array}{ccc} -\lambda & \frac{k}{M} & 0\\ -\lambda & -\frac{2k}{m}-\lambda & \frac{k}{m}\\ -\lambda & \frac{k}{M} & -\frac{k}{M}-\lambda\end{array}\right|\\
&= -\lambda\left|\begin{array}{ccc} 1 & \frac{k}{M} & 0\\ 1 & -\frac{2k}{m}-\lambda & \frac{k}{m}\\ 1 & \frac{k}{M} & -\frac{k}{M}-\lambda\end{array}\right|\\
&= -\lambda\left|\begin{array}{ccc} 1 & \frac{k}{M} & 0\\ 0 & -\frac{2k}{m}-\frac{k}{M}-\lambda & \frac{k}{m}\\ 0 & 0 & -\frac{k}{M}-\lambda\end{array}\right|\\
&= -\lambda\left(\frac{k}{M}+\lambda\right)\left(\lambda+\frac{2k}{m}+\frac{k}{M}\right).
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de cette matrice sont donc

$$0,-\frac{k}{M},-\frac{k}{M}-\frac{2k}{m}.$$

Comme ces valeurs propres sont distinctes, la matrice est diagonalisable.

Les vecteurs propres X relatifs à la valeur propre 0 vérifient

$$\left(\begin{array}{ccc} -\frac{k}{M} & \frac{k}{M} & 0\\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m}\\ 0 & \frac{k}{M} & -\frac{k}{M}\end{array}\right)X=0.$$

Si

$$X=\left(\begin{array}{c} x\\ y\\ z\end{array}\right)$$

cette équation est équivalente au système

$$\left\{\begin{array}{l} x=y\\ x-2y+z=0\\ y=z\end{array}\right.$$

ou encore au système

$$\left\{\begin{array}{l} x=y\\ y=z.\end{array}\right.$$

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 0 s'écrivent donc

$$c\left(\begin{array}{c} 1\\ 1\\ 1\end{array}\right),\quad c=\text{constante}\neq 0.$$

Les vecteurs propres X relatifs à la valeur propre $-k/M$ vérifient

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{k}{M} & 0 \\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m}+\frac{k}{M} & \frac{k}{m} \\ 0 & \frac{k}{M} & 0 \end{pmatrix} X = 0.$$

Si

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

cette équation est équivalente au système

$$\begin{cases} y = 0 \\ \frac{k}{m}x + (-\frac{2k}{m}+\frac{k}{M})y + \frac{k}{m}z = 0 \end{cases}$$

ou encore au système

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = -x. \end{cases}$$

Les vecteurs propres s'écrivent donc

$$c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c = \text{constante} \neq 0.$$

Les vecteurs propres X relatifs à la valeur propre $-k/M - 2k/m$ vérifient

$$\begin{pmatrix} \frac{2k}{m} & \frac{k}{M} & 0 \\ \frac{k}{m} & \frac{k}{M} & \frac{k}{m} \\ 0 & \frac{k}{M} & \frac{2k}{m} \end{pmatrix} X = 0.$$

Si

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

cette équation est équivalente au système

$$\begin{cases} \frac{2k}{m}x + \frac{k}{M}y = 0 \\ \frac{k}{m}x + \frac{k}{M}y + \frac{k}{m}z = 0 \\ \frac{k}{M}y + \frac{2k}{m}z = 0 \end{cases}$$

ou encore au système

$$\begin{cases} x = z \\ y = -\frac{2M}{m}x. \end{cases}$$

Les vecteurs propres s'écrivent donc

$$c\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2M}{m} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \text{constante} \neq 0.$$

On a donc

$$\Delta := S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k}{M} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-k}{M} - \frac{2k}{m} \end{pmatrix}$$

avec

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{-2M}{m} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si on pose

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

le système (4.1) est alors équivalent au système

$$D_t^2 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \Delta \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

lequel s'écrit encore

$$\left\{ \begin{array}{lcl} D_t^2 y_1 & = & 0 \\ D_t^2 y_2 & = & -\frac{k}{M} y_2 \\ D_t^2 y_3 & = & -(\frac{k}{M} + \frac{2k}{m}) y_3. \end{array} \right.$$

On constate donc que les équations sont maintenant découplées et que chacune d'entre elles se résout aisément (puisque c'est une équation différentielle linéaire à coefficients constants homogène d'ordre 2).

Résolution de $D_t^2 y_1 = 0$.
L'ensemble des solutions réelles de cette équation est l'ensemble des fonctions qui s'écrivent

$$y_1(t) = r_1 t + r_2, \quad r_1, r_2 \in \mathbb{R}.$$

Résolution de $D_t^2 y_2 = -\frac{k}{M} y_2$.
On a

$$D_t^2 y_2 = -\frac{k}{M} y_2 \ \Leftrightarrow \ D_t^2 y_2 + \frac{k}{M} y_2 = 0.$$

L'ensemble des solutions de cette équation est l'ensemble des fonctions qui s'écrivent

$$y_2(t) = c_1 e^{i\sqrt{k/M}\, t} + c_2 e^{-i\sqrt{k/M}\, t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

et l'ensemble des solutions réelles est l'ensemble des fonctions qui s'écrivent

$$y_2(t) = r_1 \cos(\sqrt{k/M}\, t) + r_2 \sin(\sqrt{k/M}\, t), \quad r_1, r_2 \in \mathbb{R}.$$

Résolution de $D_t^2 y_3 = -(\frac{k}{M} + \frac{2k}{m}) y_3$.
On a

$$D_t^2 y_3 = -\left(\frac{k}{M} + \frac{2k}{m}\right) y_3 \ \Leftrightarrow \ D_t^2 y_3 + \left(\frac{k}{M} + \frac{2k}{m}\right) y_3 = 0.$$

Ce cas est analogue au précédent. L'ensemble des solutions réelles est l'ensemble des fonctions qui s'écrivent

$$y_3(t) = r_1 \cos(\sqrt{k/M + 2k/m}\, t) + r_2 \sin(\sqrt{k/M + 2k/m}\, t), \quad r_1, r_2 \in \mathbb{R}.$$

Finalement, les solutions x_1, x_2, x_3 sont données par

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= S \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{-2M}{m} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\
&= y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2M/m \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

où y_1 ne fait intervenir que la fréquence nulle, y_2 ne fait intervenir que la fréquence $\sqrt{k/M}$ et y_3 ne fait intervenir que la fréquence $\sqrt{k/M + 2k/m}$. Ces fréquences sont appelées **modes normaux de vibration**.

4.1.3 Conclusion

Le mouvement des trois masses, déterminé par le vecteur de fonctions (du temps)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

apparaît donc comme une superposition de trois « mouvements fondamentaux », chacun faisant intervenir un mode normal :

$$(a)\ y_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (b)\ y_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (c)\ y_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2M/m \\ 1 \end{pmatrix}$$

qui correspondent respectivement aux mouvements suivants

$$(a)\ x_1(t) = x_2(t) = x_3(t) :$$

les masses bougent sans vibration entre elles

$$(b)\ x_1(t) = -x_3(t),\ x_2(t) = 0 :$$

immobilité de la masse centrale et mouvement opposé des masses extrêmes

$$(c)\ x_1(t) = x_3(t),\ x_2(t) = -2M/m\ x_3(t) :$$

même mouvement pour les masses extrêmes et mouvement opposé pour la masse centrale.

4.2 Découplage de systèmes d'équations différentielles à coefficients constants, 2

Dans le cas où la matrice n'est pas diagonalisable, on procède alors (en toute généralité) de la façon suivante, laquelle peut se révéler fastidieuse même en dimension 2.

Il faut savoir que pour toute matrice carrée A il existe une matrice inversible S telle que $S^{-1}AS$ soit une matrice dite de Jordan, matrice diagonale « par blocs » où les « blocs » sont des matrices du type (exemple d'un bloc de dimension 3)

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

La seconde chose à utiliser est le fait que tout système d'équations différentielles d'ordre $n > 1$ peut être rendu équivalent à un système d'ordre 1 par ajout d'équations supplémentaires.

Enfin, la résolution des systèmes d'ordre 1 à coefficients constants s'effectue par le calcul d'une exponentielle de matrice, qui est une généralisation de ce qui ce fait dans le cas d'une seule équation d'ordre 1. Les solutions sont des combinaisons linéaires de fonctions du type « exponentielle-polynôme », faisant intervenir les valeurs propres de la matrice A et leur multiplicité (dans le degré du polynôme).

Des exemples sont présentés dans l'ouvrage [1].

4.3 Evolution d'une population en présence de « facteurs limitants »

Dans la nature, l'accroissement d'une population est modulée par la disponibilité des ressources alimentaires, par la prédation, par les facteurs du milieu. Tous ces éléments peuvent avoir un effet favorable ou défavorable sur la croissance de la population et faire varier les taux de natalité et de mortalité. C'est ce que l'on appelle « facteurs limitants ».

Un modèle largement utilisé en écologie se présente comme suit (modèle de Verhulst [1]).

Comme présenté ci-dessus, on se place dans le cas où une présence de divers facteurs (facteurs « limitants ») traduisant la résistance du milieu va modifier le taux d'accroissement de la population, par exemple en diminuant la natalité et en augmentant la mortalité.

Notons $N(t)$ la population au temps t, N_0 la population initiale, K son effectif maximum dans le milieu (K est encore appelé « capacité biotique du milieu ») et r une constante strictement positive relative à l'espèce considérée (r est appelé « taux d'accroissement intrinsèque » [2]). Le modèle propose que le « taux de croissance » R de la population dans le cadre étudié prenne en compte la capacité biotique maximale qui est fonction des facteurs limitants du milieu. D'après ce modèle, le taux de croissance R est alors donné par

$$R(t) \;=\; r\left(1-\frac{N(t)}{K}\right).$$

On constate que ce modèle rend compte du fait que lorsque N est petit, R est proche de r et quand N est proche de K, R est proche de 0. La vitesse $D_tN(t)$ d'accroissement de la population est alors donnée par

$$\boxed{D_tN(t) = R(t)\; N(t) = r\left(1-\frac{N(t)}{K}\right)\; N(t).}$$

Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre, non linéaire, dont la « séparation » de l'inconnue N et de la variable t autorise une résolution rigoureuse (voir plus loin).

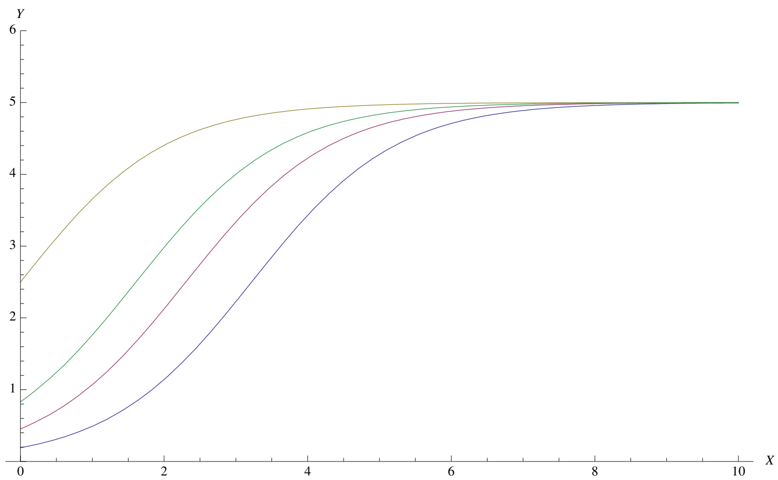
Après quelques développements, on trouve ainsi que la solution de cette équation, tenant compte de la condition initiale (la population vaut N_0 au départ, c'est-à-dire ici pour $t = 0$), est donnée par

$$N(t) = \frac{K}{1+c_0e^{-rt}}, \quad t \geq 0$$

1. Pierre-François Verhulst (né à Bruxelles le 28 octobre 1804 - mort le 15 février 1849 dans cette même ville) est un mathématicien belge. Inspiré par l'*Essai sur le principe de population* de Thomas Malthus, il proposa en 1838 le modèle de Verhulst, décrivant l'évolution des populations animales grâce à un modèle qui n'est pas exponentiel.

2. Il s'agit du coefficient multiplicateur de la population à chaque génération s'il n'y a aucune contrainte du milieu sur l'évolution de la densité de population.

avec
$$c_0 = \frac{K - N_0}{N_0}.$$
Voici plusieurs représentations de N, la diversité étant liée aux différentes valeurs considérées pour c_0.



Cette équation et ses solutions sont largement exploitées dans des cours d'écologie notamment.

Dans le cadre d'un cours de mathématique, ces fonctions N peuvent être étudiées selon plusieurs aspects, qui ont leur interprétation spécifique pour la biologie ; on peut ainsi étudier les limites, la croissance, la concavité, les extrema, notamment en fonction de la valeur de c_0 (donc des données du milieu).

Résolution

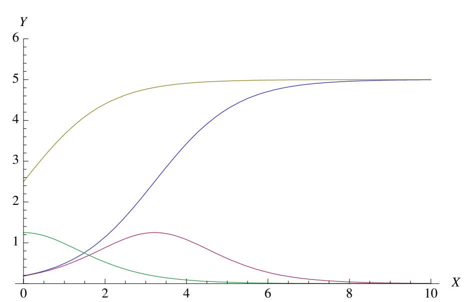
Analyse : supposons avoir une solution N. On a donc
$$DN \;=\; r\left(1 - \frac{N}{K}\right)\, N.$$
En supposant que le dénominateur ne s'annule pas et en intégrant, on obtient, pour $t \geq 0$,
$$\int_0^t \frac{DN(s)}{N(s)\,\left(1 - \frac{N(s)}{K}\right)}\, ds \;=\; \int_0^t r\, ds \;=\; rt.$$
Calculons alors le membre de gauche de cette égalité. On a, en décomposant la fraction rationnelle (en $N(s)$) en une somme de fractions simples,
$$\begin{aligned}
&\int_0^t \frac{DN(s)}{N(s)\,\left(1 - \frac{N(s)}{K}\right)} ds \\
&= \int_0^t \left(\frac{DN(s)}{N(s)} + \frac{1/K}{1 - \frac{N(s)}{K}} DN(s)\right) ds \\
&= \ln N(t) - \ln N_0 - \ln\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) + \ln\left(1 - \frac{N_0}{K}\right) \\
&= \ln\left(\frac{N(t)}{1 - \frac{N(t)}{K}}\right) + C_0
\end{aligned}$$

avec
$$C_0 = \ln\left(\frac{1 - N_0/K}{N_0}\right).$$
Il s'ensuit que N vérifie l'égalité
$$\ln\left(\frac{N(t)}{1 - \frac{N(t)}{K}}\right) = -C_0 + \int_0^t r\ ds = -C_0 + rt.$$
En prenant l'exponentielle, on trouve alors l'égalité
$$\frac{N(t)}{1 - \frac{N(t)}{K}} = \frac{N_0}{1 - \frac{N_0}{K}} e^{rt}, \quad t \geq 0,$$
laquelle permet d'isoler N et ainsi d'en trouver l'expression explicite, à savoir
$$N(t) = \frac{K}{1 + c_0 e^{-rt}},\ t \geq 0$$
avec $c_0 = (K - N_0)\ N_0$.

Synthèse : on montre directement par calcul que les fonctions du type
$$N(t) = \frac{K}{1 + c_0 e^{-rt}},\ t \geq 0$$
vérifient l'équation différentielle de départ.

Discussion

La dérivée de N est la « vitesse d'accroissement de l'effectif ». On a
$$\begin{aligned} DN(t) &= r\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)\ N(t) = r\left(N(t) - \frac{N^2(t)}{K}\right) \\ D^2N(t) &= r\left(1 - \frac{2N(t)}{K}\right)\ DN(t) = r^2 N(t)\left(1 - \frac{2N(t)}{K}\right)\ \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \end{aligned}$$
et comme $0 < N(t) < K$ quel que soit t, cette expression ne peut s'annuler que lorsqu'on a l'égalité $2N(t) = K$, c'est-à-dire lorsque
$$t = \frac{1}{r}\ln\left(\frac{K}{N_0} - 1\right).$$
Posons alors
$$t_0 = \frac{1}{r}\ln\left(\frac{K}{N_0} - 1\right).$$
On a $t_0 \geq 0$ si et seulement si $K \geq 2N_0$. Comme $1 - \frac{2N(t)}{K} < 0$ lorsque $t < t_0$ et $1 - \frac{2N(t)}{K} > 0$ lorsque $t > t_0$, on a bien un temps t_0 auquel la vitesse d'accroissement de l'effectif est maximale, pour autant que $K \geq 2N_0$. Lorsque $K < 2N_0$, D^2N est toujours strictement négatif pour des temps positifs, donc la vitesse d'accroissement DN est strictement décroissante.



4.4 Evolution d'une population proie-prédateur

4.4.1 Présentation du modèle de Lotka-Volterra

En guise d'introduction, voici un extrait tiré de wikipedia. Le reste s'inspire également fortement de cette source ainsi que de passages de l'ouvrage [3].

En mathématiques, les équations de prédation de Lotka[3]*-Volterra*[4]*, que l'on désigne aussi sous le terme de « modèle proie-prédateur », sont un couple d'équations différentielles non linéaires du premier ordre, et sont couramment utilisées pour décrire la dynamique de systèmes biologiques dans lesquels un prédateur et sa proie interagissent. Elles ont été proposées indépendamment par Alfred James Lotka en 1925 et Vito Volterra en 1926.*

Ce système d'équations est classiquement utilisé comme modèle pour la dynamique du lynx et du lièvre des neiges, pour laquelle de nombreuses données de terrain ont été collectées sur les populations des deux espèces par la Compagnie de la baie d'Hudson au XIXe siècle. Il a aussi été employé par Allan Hobson pour décrire les relations entre les neurones cholinergiques responsables du sommeil paradoxal et les neurones aminergiques liées à l'état de veille.

Ces équations s'écrivent

$$\left\{\begin{array}{rcl} D_t x(t) & = & ax(t) - bx(t)y(t) \\ D_t y(t) & = & -cy(t) + dx(t)y(t) \end{array}\right.$$

où t est le temps, $x(t)$ l'effectif des proies au temps t, $y(t)$ l'effectif des prédateurs au temps t et où les dérivées représentent la variation des populations au cours du temps. Les paramètres a, b, c, d caractérisent les interactions : a est le taux de reproduction intrinsèque des proies (indépendamment des prédateurs), b est le taux de mortalité des proies en fonction des prédateurs rencontrés, c est le taux de mortalité intrinsèque des prédateurs, d est le taux de reproduction des prédateurs en fonction des proies rencontrées et mangées.

Comment interpréter cette modélisation (Lotka-Voletrra) ? Voici...

Considérons tout d'abord la première équation, $D_t x(t) = ax(t) - bx(t)y(t)$, dite équation des proies. Les proies sont supposées avoir une source illimitée de nourriture et se reproduire exponentiellement si elles ne sont soumises à aucune prédation ; cette croissance exponentielle est représentée dans l'équation ci-dessus par le terme $ax(t)$. Le taux de prédation sur les proies est supposé proportionnel à la fréquence de rencontre entre les prédateurs et les proies ; il est représenté ci-dessus par $bx(t)y(t)$. Si x ou y est nul, alors il ne peut y avoir aucune prédation. Avec ces deux termes, l'équation

$$D_t x(t) = ax(t) - bx(t)y(t)$$

peut alors être interprétée comme ceci : la variation du nombre de proies est donnée par sa propre croissance moins le taux de prédation qui lui est appliqué.

Considérons ensuite la seconde équation, $D_t y(t) = -cy(t) + dx(t)y(t)$, dite équation des prédateurs. Dans cette équation, $dx(t)y(t)$ représente la croissance de la population prédatrice. Notons la similarité avec le taux de prédation ; cependant, une constante différente est utilisée car la vitesse à laquelle la population des prédateurs augmente n'est pas nécessairement égale à

3. Alfred James Lotka, né le 2 mars 1880 à Lemberg en Autriche-Hongrie et mort à New York le 5 décembre 1949, est un mathématicien et statisticien américain, théoricien de la dynamique des populations.

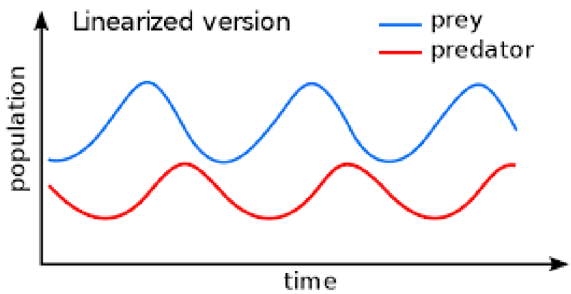
4. Vito Volterra, né le 3 mai 1860 à Ancône dans les Marches et mort le 11 octobre 1940 à Rome, est un mathématicien et physicien italien. Il est surtout connu pour ses travaux sur les équations intégro-différentielles, la statique des dislocations dans les cristaux, la biomathématique et la dynamique des populations.

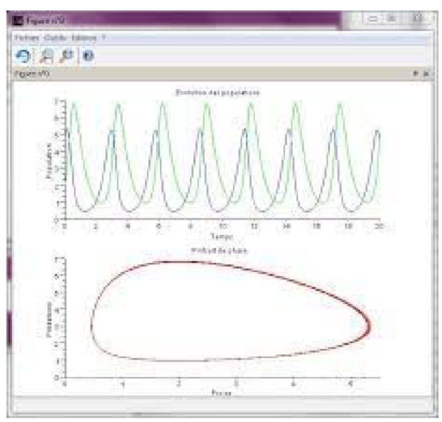
celle à laquelle il consomme la proie. De plus, $cy(t)$ représente la mort naturelle des prédateurs ; c'est une décroissance exponentielle. L'équation

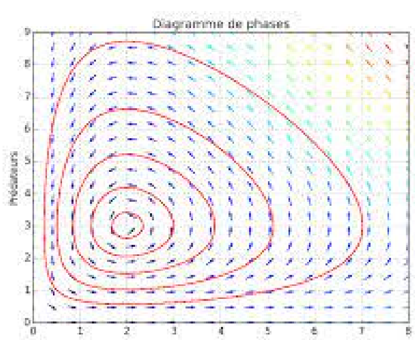
$$D_t y(t) \;=\; -cy(t) + dx(t)y(t)$$

représente donc la variation de la population de prédateurs en tant que croissance de cette population, diminuée du nombre de morts naturelles.

On montre que la fonction $F : (x, y) \mapsto a\ln(y) - b\,y + c\ln(x) - d\,x$ est une « intégrale première » du système, c'est-à-dire que la fonction $t \mapsto F(x(t), y(t))$ est constante (la constante dépend bien sûr des conditions initiales). Cela signifie donc que pour tout t, le point de coordonnées $(x(t), y(t))$ se trouve sur la courbe d'équation cartésienne $F(x, y) = \mathit{constante}$. Les solutions maximales sont périodiques, et leur trajectoire est fermée bornée. Les solutions n'ont pas d'expression simple à l'aide des fonctions trigonométriques habituelles. Néanmoins, une solution approximative linéarisée offre un mouvement harmonique simple, avec la population des prédateurs en retard de $\pi/2$ (un quart de période) sur celle des proies.







On remarque que les courbes semblent « centrées » en un point ; et c'est bien le cas comme le montrent les développements mathématiques. On appelle point critique du système un point de coordonnées (x^*, y^*) qui annule le second membre du système d'équations, ce qui signifie ici

$ax^* - bx^*y^* = 0$ et $-cy^* + dx^*y^* = 0$; les points critiques sont donc ici l'origine et le point de coordonnées $(c/d, a/b)$. C'est celui-ci qui joue le rôle de « centre ».

On calcule également les moyennes des populations : si T est la période des solutions et si on désigne par $\mathcal{M}(x)$ et $\mathcal{M}(y)$ les moyennes des populations des proies et des prédateurs, on a (intégration sur un intervalle de période)

$$\mathcal{M}(x) \ = \ \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\ dt \ = \ \frac{c}{d}, \quad \mathcal{M}(y) \ = \ \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} y(t)\ dt \ = \ \frac{a}{b}.$$

On voit donc, de façon prévisible, que si l'on augmente la mortalité des prédateurs, la population moyenne des proies augmente, et que si l'on diminue le taux de reproduction des proies, la population moyenne des prédateurs diminue.

Annexe A

Petit formulaire pour les mathématiques et les sciences

A.1 L'alphabet grec

alpha	α	iota	ι	rhô	ρ
bêta	β	kappa	κ	sigma	σ, Σ
gamma	γ, Γ	lambda	λ, Λ	tau	τ
delta	δ, Δ	mu	μ	upsilon	υ, Υ
epsilon	ϵ, ε	nu	ν	phi	ϕ, φ, Φ
zêta, dzêta	ζ	xi, ksi	ξ, Ξ	khi	χ
êta	η	omicron	o	psi	ψ, Ψ
thêta	$\theta, \vartheta, \Theta$	pi	π, Π	omega	ω, Ω

A.2 Symboles usuels du langage mathématique

Notations habituelles pour les ensembles classiques de nombres

$\mathbb{N}$	ensemble des naturels positifs ou nul
$\mathbb{N}_0$	ensemble des naturels strictement positifs
$\mathbb{Z}$	ensemble des nombres entiers
$\mathbb{Z}_0$	ensemble des nombres entiers non nuls
$\mathbb{Q}$	ensemble des nombres rationnels
$\mathbb{Q}_0$	ensemble des nombres rationnels non nuls
$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels
$\mathbb{R}_0$	ensemble des nombres réels non nuls
$\mathbb{C}$	ensemble des nombres complexes
$\mathbb{C}_0$	ensemble des nombres complexes non nuls

Notations relevant de la théorie des ensembles

Un ensemble est désigné soit explicitement, en notant ses éléments entre accolades, soit de façon générique en utilisant (le plus souvent) une lettre majuscule. Ainsi, l'ensemble dont les éléments sont a, b, c, d, e est noté explicitement $\{a, b, c, d, e\}$. Lorsque l'ensemble contient une infinité d'éléments, on adapte cette notation.

Dans ce qui suit, A, B désignent deux ensembles.

Notation	Signification
$a \in A$	a appartient à l'ensemble A ou a est un élément de A
$A \subset B$	l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B
	c'est-à-dire tout élément de A est un élément de B
$A = B$	les ensembles A et B sont les mêmes
	c'est-à-dire tout élément de A est élément de B et tout élément de B est élément de A
	c'est-à-dire $A \subset B$ et $B \subset A$
$A \cap B$	ensemble intersection de A et de B
	c'est-à-dire l'ensemble des élements qui appartiennent à la fois à A et à B
$A \cup B$	ensemble union de A et de B
	c'est-à-dire l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B
	c'est-à-dire l'ensemble des éléments qui appartiennent soit à A et pas à B, soit à B et pas à A, soit à A et à B
$\emptyset$	ensemble vide
	c'est-à-dire l'ensemble qui ne contient aucun élément
$A \setminus B$	ensemble A moins B
	c'est-à-dire l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B

Par exemple, l'ensemble des réels en lesquels la fonction cosinus s'annule est l'ensemble des réels qui sont égaux à $\pi/2$ auquel on ajoute un multiple entier de π ; cet ensemble est noté

$$\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

L'ensemble de définition de la fonction tangente, quotient de la fonction sinus par la fonction cosinus, est l'ensemble des réels pour lesquels le cosinus ne s'annule pas ; il s'agit donc de l'ensemble

$$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Notations relevant de la logique élémentaire

Soient P, Q deux propositions

Notation	Signification
$P \Rightarrow Q$	si la proposition P est vraie, alors la proposition Q est vraie ;
	on dit aussi
	- *il suffit que la proposition P soit vraie pour que Q le soit aussi,*
	- *il est nécessaire que la proposition Q soit vraie pour que P soit vrai,*
	- *pour que la proposition Q soit vraie, il est suffisant que P soit vrai*
	- *pour que la proposition P soit vraie, il est nécessaire que Q soit vrai*
$P \Leftrightarrow Q$	P et Q sont des propositions équivalentes
	c'est-à-dire $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$
$\forall$	pour tout
$\forall x \in A$ on a ...	pour tout (ou quel que soit) l'élément x de l'ensemble A, on a ...
$\exists$	il existe
$\exists x \in A$ tel que ...	il existe un élément x de l'ensemble A tel que ...

A.3 Rappels sur les triangles et les angles

Cas d'égalité des triangles

Deux triangles sont dits égaux s'ils sont "superposables" c'est-à-dire si on obtient l'un à partir de l'autre par un déplacement dans le plan (qui n'affecte pas leur rigidité) ou encore si on obtient l'un à partir de l'autre par une translation suivie d'une rotation.

Deux triangles sont égaux dans chacun des cas suivants :
- ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun
- ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun
- ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun.

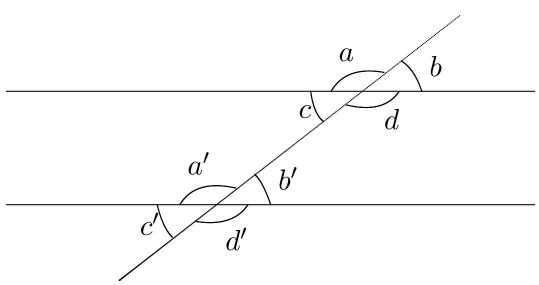
Cas de similitude des triangles

Deux triangles sont dits semblables si on obtient l'un à partir de l'autre par une similitude. (En géométrie, une similitude est une transformation qui conserve les rapports de distances.)

Deux triangles sont semblables dans chacun des cas suivants :
- ils ont deux angles égaux chacun à chacun
- ils ont un angle égal compris entre des côtés proportionnels
- ils ont les trois côtés proportionnels
- ils ont leurs côtés parallèles chacun à chacun
- ils ont leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun.

Cas d'égalité des angles

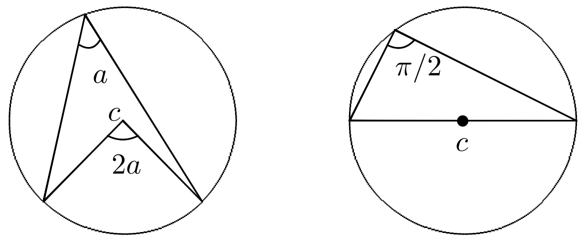
Considérons deux droites parallèles distinctes et une sécante.



Les angles alternes internes $c,\ b'$ (resp. $d,\ a'$) sont égaux.
Les angles alternes externes $a,\ d'$ (resp. $b,\ c'$) sont égaux.
Les angles opposés par le sommet b et c (resp. a et d, b' et c', a' et d') sont égaux.
Les angles correspondants a et a'(resp. b et b', c et c', d et d') sont égaux.

Angles et cercle

Un angle inscrit dans un cercle a la mesure de la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc.



A.4 Quelques relations fondamentales de trigonométrie

Les fonctions sinus et cosinus sont définies sur $\mathbb{R}$ et périodiques de période 2π. On a

$$\sin x = 0 \ \Leftrightarrow\ \exists k \in \mathbb{Z} : x = k\pi; \qquad \cos x = 0 \ \Leftrightarrow\ \exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Pour tout réel x qui n'annule pas le dénominateur, on a

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

On a les relations suivantes (et de nombreuses conséquences !) pour tous réels x, y

$\cos(-x) = \cos x$

$\sin(-x) = -\sin x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$

$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

Relations dans les triangles

On désigne par A, B, C les sommets d'un triangle et par a, b, c les longueurs des côtés opposés respectivement à ces sommets. Enfin, les mesures des angles (orientés positivement) de ce triangle sont respectivement appelées α, β, γ.

Triangle quelconque

On a les formules suivantes.

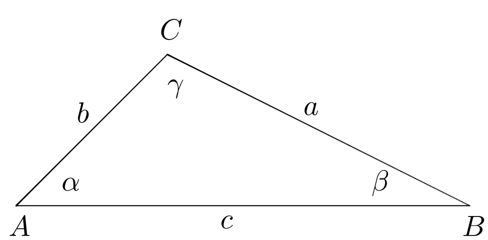
$\alpha + \beta + \gamma = \pi$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\ \alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos\ \beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\ \gamma$

$\dfrac{a}{\sin\ \alpha} = \dfrac{b}{\sin\ \beta} = \dfrac{c}{\sin\ \gamma}$



Triangle rectangle

Dans le cas particulier des triangles rectangles, les relations ci-dessus se simplifient de la manière suivante.

Le côté opposé à l'angle droit (ici α) se nomme hypoténuse.

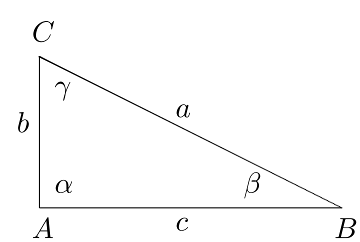
On a les formules suivantes :

$\alpha + \beta + \gamma = \pi$ avec un des angles égal à $\pi/2$

$b = a\ \sin\beta = a\ \cos\gamma = c\ \tan\ \beta = c\ \operatorname{cotan}\ \gamma$

$c = a\ \sin\gamma = a\ \cos\beta = b\ \tan\ \gamma = b\ \operatorname{cotan}\ \beta$

$a^2 = b^2 + c^2$

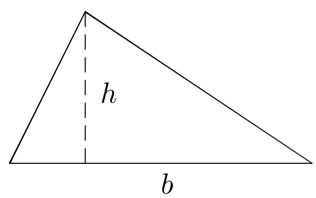


Dans un triangle rectangle, la longueur d'un côté de l'angle droit est égale à
- la longueur de l'hypoténuse multipliée par le sinus de l'angle opposé ou le cosinus de l'angle adjacent
- la longueur de l'autre côté multipliée par la tangente de l'angle opposé ou la cotangente de l'angle adjacent.

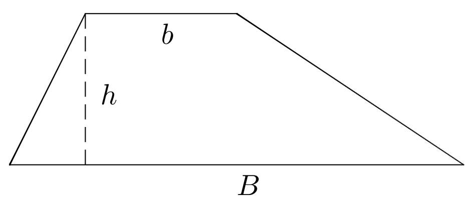
Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

A.5 Aires et volumes

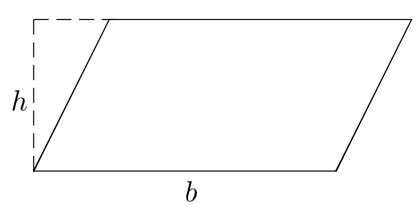
Aire d'un triangle =
la moitié du produit de la longueur d'un côté (b) et de la hauteur correspondante (h) c'est-à-dire $\frac{bh}{2}$



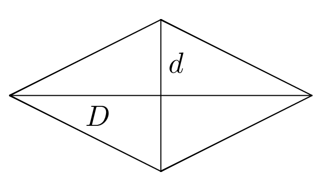
Aire d'un trapèze =
la moitié du produit de sa hauteur (h) par la somme des longueurs de ses bases (B et b) c'est-à-dire $\frac{(B+b)h}{2}$



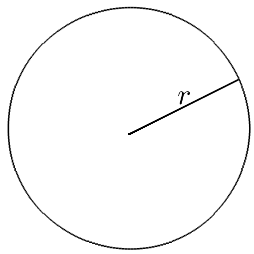
Aire d'un parallélogramme =
le produit de la longueur d'un côté (b) par la hauteur correspondante (h) c'est-à-dire bh



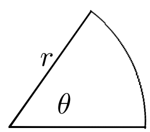
Aire d'un losange =
la moitié du produit des longueurs de ses diagonales (D et d) c'est-à-dire $\frac{Dd}{2}$



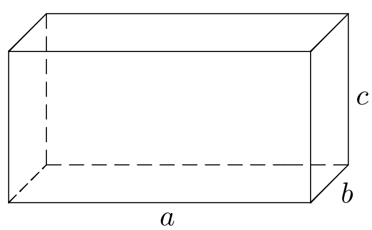
Aire d'un disque de rayon de longueur r =
le produit de π par le carré de la longueur du rayon (r) c'est-à-dire πr^2
Longueur de la circonférence (cercle) =
le double du produit de π par la longueur de son rayon (r) c'est-à-dire $2\pi r$



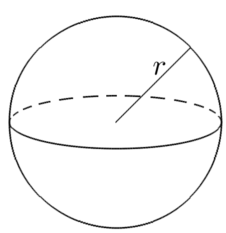
Aire d'une partie de disque de rayon r =
la moitié du produit de la mesure de l'angle en radian (θ) par le carré de la longueur du rayon (r) c'est-à-dire $\frac{\theta}{2}r^2$.
Longueur d'une partie de circonférence (cercle) =
le produit de la mesure de l'angle en radian (θ) par la longueur du rayon (r) c'est-à-dire θr



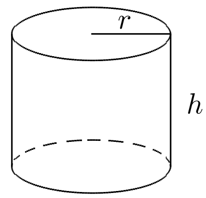
Volume d'un parallélépipède (dont les arêtes ont pour longueur a, b, c) = abc
Aire totale des 6 faces d'un parallélépipède = $2ab + 2ac + 2bc$



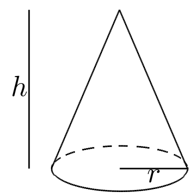
Volume d'une boule dans l'espace (volume sphérique) de rayon r =
le produit du cube de la longueur du rayon (r) par quatre tiers de π c'est-à-dire $\frac{4}{3}\pi r^3$
Aire d'une sphère =
le quadruple du produit du carré de la longueur du rayon (r) par π c'est-à-dire $4\pi r^2$



Volume d'un corps cylindrique de rayon r et de hauteur h =
le produit de l'aire du disque par la hauteur (h) du cylindre c'est-à-dire $\pi r^2 h$
Aire latérale d'un cylindre (surface cylindrique), sans compter les disques des bases =
le produit de la longueur du cercle par la hauteur (h) du cylindre c'est-à-dire $2\pi rh$



Volume d'un corps conique de hauteur h et dont la base a un rayon r =
le tiers du volume du cylindre de hauteur h et de base de même rayon c'est-à-dire $\frac{1}{3}\pi r^2 h$
Aire latérale d'un cône, sans compter le disque de base = $\pi r\sqrt{r^2 + h^2}$



A.6 Dérivées des fonctions élémentaires

Dans ce qui suit, x désigne une variable réelle, m désigne un naturel strictement positif et r désigne un réel. Certaines dérivées peuvent être obtenues à partir d'autres ; il y a également de nombreuses autres expressions que l'on peut obtenir à partir de celles-ci !

Expression fonction	Domaine de définition et de continuité	Domaine de dérivabilité	Expression dérivée
r	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
x^m	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	mx^{m-1}
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{cotan} x$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$	$\dfrac{-1}{\sin^2 x}$
$\exp x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\exp x$
$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$]-1, 1[$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arcos} x$	$[-1, 1]$	$]-1, 1[$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcotan} x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{-1}{1+x^2}$
$\ln x$	$]0, +\infty[$	$]0, +\infty[$	$\dfrac{1}{x}$
x^r	$]0, +\infty[$	$]0, +\infty[$	rx^{r-1}

Bibliographie

[1] Boularas D., Fredon D., Petit D., *Mini manuel de Mathématiques pour les sciences de la vie et de l'environnement,* Dunod 2009

[2] Crasborn J., Syllabus intitulé *Bases*. Voir pages web relatives au cours (diverses informations) ; lien direct : http ://www.afo.ulg.ac.be/fb/ens/2009-2010/123Sc/Prerequis.pdf

[3] Jones D. S., Sleeman B. D., *Differential equations and mathematical biology,* Chapman & Hall/CRC Mathematical Biology and Medecine Series, 2003

[4] Mathonet P., Cours de Mathématiques générales de première année (biologie et géographie), 2020-2021

[5] Bibliothèque ≪ Tangente ≫, éditions POLE 2011, HS 42, *Mathématiques et biologie*