



Mathématiques générales II (MATH0009)

Année académique 2025-2026

CORRIGÉ DE L'EXAMEN DU 26 AOÛT 2026
BIOLOGISTES ET GÉOGRAPHES BLOC 2

QUESTIONNAIRE

THEORIE

Question 1 : QCM

Pour chaque question, il n'y a qu'un seul item correct. Réponse correcte : 1 point ; pas de réponse : 0 point ; réponse incorrecte : -0.25 point.

Pour chacune des questions, choisir parmi les différentes affirmations celle qui est correcte et **colorier complètement** la case qui la précède sur cette feuille.

1. Une publicité sur les pots de confiture annonce que le second pot acheté sera à moitié prix. Pour le consommateur qui achète deux pots, cela signifie que chaque pot lui aura coûté le prix de départ
☐ divisé par $3/4$ ☐ divisé par $2/3$ ☐ multiplié par $3/4$ ☐ multiplié par $2/3$ ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
2. Si a est un réel strictement positif et si b est un réel strictement supérieur à 1, alors la racine carrée du réel $a^2(1-b)^2$ est
☐ $a - ab$ ☐ $a + ab$ ☐ $-a + ab$ ☐ $-a - ab$ ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
3. Si z est un complexe, alors la partie imaginaire de iz^2 est toujours
☐ z^2 ☐ $(\Im(z))^2$ ☐ $(\Re(z))^2$ ☐ $(\Re(z))^2 - (\Im(z))^2$ ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
4. Le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \cos(\cos(x))$ est
☐ $[0, 2\pi]$ ☐ $[-1, 1]$ ☐ $\mathbb{R}$ ☐ $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
5. Si f est une fonction dont le domaine de définition est $[0, +\infty[$, quel est le domaine de définition de la fonction de fonction F donnée explicitement par $F(x) = f(1 - e^x)$?
☐ $[0, +\infty[$ ☐ $] - \infty, 0]$ ☐ $\mathbb{R}$ ☐ $] - \infty, 1]$ ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
6. On considère l'équation différentielle suivante

$$Df^2(x) = \frac{4x}{1+x^2} f(x).$$

Parmi les propositions suivantes, laquelle est exacte ?

- ☐ C'est une équation différentielle linéaire à coefficients constants homogène d'ordre 2.
 - ☐ C'est une équation différentielle linéaire à coefficients constants non homogène d'ordre 2.
 - ☐ La fonction $\arctan(x)$, $x \in \mathbb{R}$ vérifie cette équation.
 - ☐ La fonction $\ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$ vérifie cette équation.
 - ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
7. Soit A une matrice carrée de dimension 5. Si on multiplie les éléments de ses deux premières colonnes par 3, alors le déterminant de la nouvelle matrice est égal à
☐ $6 \det(A)$ ☐ $3^5 \det(A)$ ☐ $9 \det(A)$ ☐ $5^3 \det(A)$ ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
 8. Soient A, B des matrices carrées de même dimension. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est **FAUSSE**?
 - ☐ Si A est inversible, alors 0 n'est pas une de ses valeurs propres.
 - ☐ Si $AB = 0$ et si A est inversible, alors $B = 0$.
 - ☐ On a toujours $\widetilde{AB} = \widetilde{B} \widetilde{A}$.
 - ☐ On a toujours $\det(A^2) = 2 \det(A)$.
 - ☐ Si la matrice A est inversible, alors le déterminant de son inverse est l'inverse de son déterminant.

Questions ouvertes

1. (1.1) Quel est le domaine de définition de la fonction exponentielle ?
(1.2) Quel est le domaine de définition de la fonction logarithme népérien ?
(1.3) Enoncer précisément les propriétés fondamentales de la fonction exponentielle et de la fonction logarithme népérien faisant intervenir une somme et un produit.
2. (2.1) Enoncer les deux lois des mineurs dans le cadre de l'étude des déterminants de matrices carrées.
(2.2) Donner l'égalité qui résume ces deux lois sous forme de produits de matrices.
(2.3) **Définir** la notion de matrice inverse d'une matrice carrée.
(2.4) Donner une condition suffisante sous laquelle une matrice carrée est inversible.
(2.5) **A partir de ce qui précède, démontrer** que la condition que vous avez donnée au point (2.4) est suffisante.

EXERCICES

1. (1.1) Si elle existe, déterminer la limite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{\ln(1 - x)}.$$

(1.2) On donne la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x + 1}$. Où cette fonction f est-elle dérivable (donner le plus grand ensemble possible) ? Déterminer ensuite l'expression explicite de la dérivée en simplifiant l'expression au maximum.

(1.3) On donne l'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 2\pi] \text{ et } 0 \leq y \leq \sin(2x)\}$. Représenter cet ensemble A dans un repère orthonormé en le hachurant ou en le coloriant et en calculer l'aire.

2. Résoudre l'équation différentielle suivante, en spécifiant dans quel intervalle on travaille

$$D^2 f(x) - 4f(x) = e^{2x}.$$

3. On donne la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(3.1) Cette matrice est-elle inversible ? Si oui, en déterminer l'inverse.

(3.2) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de M .

(3.3) La matrice M est-elle diagonalisable ? Si oui, en déterminer une forme diagonale ainsi que la matrice qui y conduit.

4. Dans un élevage, à chaque repas, des lapins ont le choix entre manger des carottes, de la salade ou des pissenlits mais ne peuvent manger qu'un aliment d'une seule catégorie lors d'un même repas. Comme ils sont gourmands, ils ne manquent jamais un repas.

L'observation montre que si un lapin a mangé des carottes à un repas, il en mangera au repas suivant dans 70 % des cas ; sinon, il mangera de la salade une fois sur 5 ou des pissenlits 1 fois sur 10.

S'il a mangé de la salade, il en mangera encore 6 fois sur 10 au repas suivant ; sinon, il mangera un des deux autres aliments de façon équiprobable.

Enfin, s'il a mangé des pissenlits, au repas suivant il y a 1 chance sur 5 qu'il mange des carottes, 2 chances sur 5 de la salade et 2 chances sur 5 qu'il mange encore des pissenlits.

(4.1) Déterminer la matrice de transition.

(4.2) A longue échéance, quelle est la probabilité que le lapin mange des pissenlits ?

THEORIE

Question 1 : QCM

1. Une publicité sur les pots de confiture annonce que le second pot acheté sera à moitié prix. Pour le consommateur qui achète deux pots, cela signifie que chaque pot lui aura coûté le prix de départ
☐ divisé par $3/4$ ☐ divisé par $2/3$ ☒ multiplié par $3/4$ ☐ multiplié par $2/3$ ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
2. Si a est un réel strictement positif et si b est un réel strictement supérieur à 1, alors la racine carrée du réel $a^2(1-b)^2$ est
☐ $a - ab$ ☐ $a + ab$ ☒ $-a + ab$ ☐ $-a - ab$ ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
3. Si z est un complexe, alors la partie imaginaire de iz^2 est toujours
☐ z^2 ☐ $(\Im(z))^2$ ☐ $(\Re(z))^2$ ☒ $(\Re(z))^2 - (\Im(z))^2$ ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
4. Le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \cos(\cos(x))$ est
☐ $[0, 2\pi]$ ☐ $[-1, 1]$ ☒ $\mathbb{R}$ ☐ $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
5. Si f est une fonction dont le domaine de définition est $[0, +\infty[$, quel est le domaine de définition de la fonction de fonction F donnée explicitement par $F(x) = f(1 - e^x)$?
☐ $[0, +\infty[$ ☒ $] - \infty, 0]$ ☐ $\mathbb{R}$ ☐ $] - \infty, 1]$ ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
6. On considère l'équation différentielle suivante

$$Df^2(x) = \frac{4x}{1+x^2} f(x).$$

Parmi les propositions suivantes, laquelle est exacte ?

- ☐ C'est une équation différentielle linéaire à coefficients constants homogène d'ordre 2.
 - ☐ C'est une équation différentielle linéaire à coefficients constants non homogène d'ordre 2.
 - ☐ La fonction $\arctan(x)$, $x \in \mathbb{R}$ vérifie cette équation.
 - ☒ La fonction $\ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$ vérifie cette équation.
 - ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
7. Soit A une matrice carrée de dimension 5. Si on multiplie les éléments de ses deux premières colonnes par 3, alors le déterminant de la nouvelle matrice est égal à
☐ $6 \det(A)$ ☐ $3^5 \det(A)$ ☒ $9 \det(A)$ ☐ $5^3 \det(A)$ ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.
 8. Soient A, B des matrices carrées de même dimension. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est **FAUSSE** ?
☐ Si A est inversible, alors 0 n'est pas une de ses valeurs propres.
☐ Si $AB = 0$ et si $\widetilde{A}$ est inversible, alors $B = 0$.
☐ On a toujours $\widetilde{AB} = \widetilde{B} \widetilde{A}$.
☒ On a toujours $\det(A^2) = 2 \det(A)$.
☐ Si la matrice A est inversible, alors le déterminant de son inverse est l'inverse de son déterminant.

Question 2 : questions ouvertes

1. (1.1) Quel est le domaine de définition de la fonction exponentielle ?
 (1.2) Quel est le domaine de définition de la fonction logarithme népérien ?
 (1.3) Énoncer précisément les propriétés fondamentales de la fonction exponentielle et de la fonction logarithme népérien faisant intervenir une somme et un produit.
2. (2.1) Énoncer les deux lois des mineurs dans le cadre de l'étude des déterminants de matrices carrées.
 (2.2) Donner l'égalité qui résume ces deux lois sous forme de produits de matrices.
 (2.3) Définir la notion de matrice inverse d'une matrice carrée.
 (2.4) Donner une condition suffisante sous laquelle une matrice carrée est inversible.
 (2.5) À partir de ce qui précède, démontrer que la condition que vous avez donnée au point (2.4) est suffisante.

Pour une réponse, voir le syllabus de théorie et le cours enseigné.

EXERCICES

1. (1.1) Si elle existe, déterminer la limite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{\ln(1 - x)}.$$

(1.2) On donne la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x + 1}$. Où cette fonction f est-elle dérivable (donner le plus grand ensemble possible) ? Déterminer ensuite l'expression explicite de la dérivée en simplifiant l'expression au maximum.

(1.3) On donne l'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 2\pi] \text{ et } 0 \leq y \leq \sin(2x)\}$. Représenter cet ensemble A dans un repère orthonormé en le hachurant ou en le coloriant et en calculer l'aire.

Solution. (1.1) Comme la fonction $\ln$ est définie sur $]0, +\infty[$, le numérateur est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et le dénominateur est une fonction définie sur $] -\infty, 1[$; comme $\ln(1 - x) = 0$ si et seulement si $1 - x = 1$ c'est-à-dire si et seulement si $x = 0$, le domaine de définition de la fonction dont on doit examiner la limite est $] -\infty, 0[\cup]0, 1[$. Comme cet ensemble n'est pas minoré, on peut envisager la limite en $-\infty$.

Cela étant, un passage direct à la limite aux numérateur et dénominateur ne permet pas de conclure tout de suite car les deux limites sont infinies. Cependant, ce fait incite à utiliser le théorème de l'Hospital.

Les numérateur et dénominateur sont des fonctions à valeurs réelles, dérivables sur $] -\infty, 0[$; le dénominateur et sa dérivée $x \mapsto 1/(x - 1)$ ne s'annulent pas sur cet intervalle et on a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{D \ln(x^2 + 1)}{D \ln(1 - x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x - 1) 2x}{x^2 + 1} = 2.$$

Par le théorème de l'Hospital, on a donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{\ln(1 - x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{D \ln(x^2 + 1)}{D \ln(1 - x)} = 2.$$

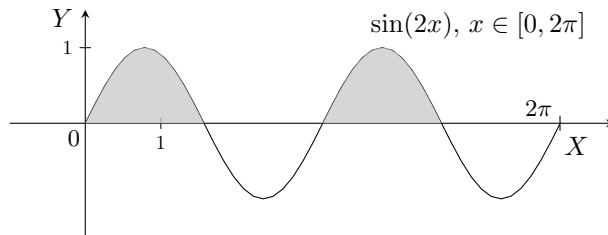
(1.2) Comme $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ pour tout x et que la fonction racine carrée est dérivable sur $]0, +\infty[$, la fonction donnée f est dérivable sur

$$\{x \in \mathbb{R} : (x + 1)^2 > 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

On a alors directement

$$\begin{aligned} Df(x) &= \frac{2(x + 1)}{2\sqrt{(x + 1)^2}} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } x > -1 \\ -1 & \text{si } x < -1. \end{cases} \end{aligned}$$

(1.3) On a la représentation suivante



Cela étant, l'aire I de cet ensemble est égale à

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin(2x) dx + \int_{\pi}^{3\pi/2} \sin(2x) dx,$$

où la fonction à intégrer est continue sur $\mathbb{R}$ donc intégrable sur tout intervalle fermé borné. On a directement

$$I = \left[-\frac{\cos(2x)}{2} \right]_0^{\pi/2} + \left[-\frac{\cos(2x)}{2} \right]_{\pi}^{3\pi/2} = 1 + 1 = 2.$$

2. Résoudre l'équation différentielle suivante, en spécifiant dans quel intervalle on travaille

$$D^2 f(x) - 4f(x) = e^{2x}.$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.

• L'équation homogène associée est l'équation $D^2 f - 4f = 0$; le polynôme caractéristique est donc $z \mapsto z^2 - 4 = (z - 2)(z + 2)$ et ses zéros sont -2 et 2 . Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$f_H(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

• Cherchons une solution particulière sur $\mathbb{R}$ puisque le second membre $g : x \mapsto e^{2x}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Comme ce second membre g est l'exponentielle polynôme $x \mapsto 1 \times e^{2x}$, produit d'un polynôme de degré 0 et d'une exponentielle dont le coefficient 2 de la variable est un zéro simple du polynôme caractéristique, une solution particulière est du type $f_P(x) = Ax e^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$ où A est une constante à déterminer.

Comme

$$Df_P(x) = (2Ax + A)e^{2x} \quad \text{et} \quad D^2 f_P(x) = (4Ax + 4A)e^{2x},$$

on obtient

$$D^2 f_P(x) - 4f_P(x) = e^{2x} \Leftrightarrow (4Ax + 4A)e^{2x} - 4(Ax e^{2x}) = e^{2x} \Leftrightarrow 4Ae^{2x} = e^{2x} \Leftrightarrow A = \frac{1}{4}.$$

Ainsi, $f_P(x) = x e^{2x} / 4$, $x \in \mathbb{R}$.

• Les solutions de l'équation donnée sont donc les fonctions

$$c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} + \frac{x e^{2x}}{4}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

3. On donne la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(3.1) Cette matrice est-elle inversible? Si oui, en déterminer l'inverse.

(3.2) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de M .

(3.3) La matrice M est-elle diagonalisable? Si oui, en déterminer une forme diagonale ainsi que la matrice qui y conduit.

Solution. (3.1) La matrice M est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Comme $\det(M) = 0$, la matrice donnée n'est pas inversible.

(3.2) Les valeurs propres de M sont les zéros du polynôme caractéristique $\det(M - \lambda \mathbb{1})$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Comme on a

$$\det(M - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(2 - \lambda) - 2 = \lambda^2 - 3\lambda = \lambda(\lambda - 3),$$

les valeurs propres de M sont 0 et 3.

Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 c'est-à-dire les vecteurs non nuls

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

tels que $(M + 0 \mathbb{1})X = 0$. On a

$$MX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x + y = 0.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 sont donc les vecteurs

$$X = c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre 3 c'est-à-dire les vecteurs non nuls

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

tels que $(M - 3\mathbb{1})X = 0$. On a

$$(M - 3\mathbb{1})X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -2x + y = 0.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 3 sont donc les vecteurs

$$X = c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

(3.3) Puisque les valeurs propres sont simples, la matrice M est diagonalisable.

Ainsi, par exemple la matrice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ est telle que } S^{-1}MS = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Dans un élevage, à chaque repas, des lapins ont le choix entre manger des carottes, de la salade ou des pissenlits mais ne peuvent manger qu'un aliment d'une seule catégorie lors d'un même repas. Comme ils sont gourmands, ils ne manquent jamais un repas. L'observation montre que si un lapin a mangé des carottes à un repas, il en mangera au repas suivant dans 70 % des cas ; sinon, il mangera de la salade une fois sur 5 ou des pissenlits 1 fois sur 10.

S'il a mangé de la salade, il en mangera encore 6 fois sur 10 au repas suivant ; sinon, il mangera un des deux autres aliments de façon équiprobable.

Enfin, s'il a mangé des pissenlits, au repas suivant il y a 1 chance sur 5 qu'il mange des carottes, 2 chances sur 5 de la salade et 2 chances sur 5 qu'il mange encore des pissenlits.

(4.1) Déterminer la matrice de transition.

(4.2) A longue échéance, quelle est la probabilité que le lapin mange des pissenlits ?

Solution. (2.1) Soient C_0 , S_0 et P_0 les situations initiales respectives (manger des carottes, manger de la salade et manger des pissenlits) et C_1 , S_1 et P_1 les situations au repas suivant. Vu les observations, on a donc

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ S_1 \\ P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/10 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 3/5 & 2/5 \\ 1/10 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ S_0 \\ P_0 \end{pmatrix} (*)$$

et la matrice de transition T est donc

$$T = \begin{pmatrix} 7/10 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 3/5 & 2/5 \\ 1/10 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

(2.2) Puisque la matrice de transition est régulière, vu (*), la probabilité qu'un lapin mange des pissenlits à long terme est donnée par la troisième composante du vecteur propre de valeur propre 1 qui est de probabilité.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls X tels que

$$(T - \mathbb{1})X = 0.$$

On a successivement

$$\begin{aligned}(T - \mathbb{1})X = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3/10 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 & 2/5 \\ 1/10 & 1/5 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\&\Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y + 2z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \\ x + 2y - 6z = 0 \end{cases} \\&\Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \\ 4y - 8z = 0 \end{cases} \\&\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x - 2y + 2z = 0 \\ z = y/2 \end{cases} \\&\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = y/2. \end{cases}\end{aligned}$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont donc les vecteurs

$$c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{avec } c \in \mathbb{C}_0.$$

Comme $c(1 + 1 + 1/2) = 1 \Leftrightarrow c = 2/5$, le vecteur propre de valeur propre 1 qui est de probabilité est donc le vecteur

$$\begin{pmatrix} 2/5 \\ 2/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que la probabilité qu'un lapin mange des pissenlits à long terme est de $1/5$, soit 20%.