



*Mathématiques générales II* (MATH0009)

Année académique 2025-2026

---

CORRIGÉ DE L'EXAMEN DU 8 JUIN 2026  
BIOLOGISTES ET GÉOGRAPHES BLOC 2

---

---

---

## QUESTIONNAIRE

---

---

### THEORIE

#### Question 1 : QCM

Pour chaque question, il n'y a qu'un seul item correct. Réponse correcte : 1 point ; pas de réponse : 0 point ; réponse incorrecte : -0.25 point.

**Pour chacune des questions, choisir parmi les différentes affirmations celle qui est correcte et colorier complètement la case qui la précède sur cette feuille.**

1. Quand on dit que la radiation en UV a augmenté de 25%, cela signifie que la radiation a été  
 divisée par 1,25     divisée par 0,8     multipliée par 0,25     multipliée par 0,8  
 Aucune des autres réponses n'est correcte.
2. Si  $r$  est un réel strictement positif et si  $s$  est un réel strictement supérieur à 1, alors la valeur absolue du réel  $r(1-s)$  est  
  $rs+r$       $rs-r$       $-rs+r$       $-rs-r$      Aucune des autres réponses n'est correcte.
3. Si  $z$  est un complexe, alors la partie imaginaire de  $iz$  est toujours  
  $z$       $\Im(z)$       $\Re(z)$       $\Re(z) - \Im(z)$      Aucune des autres réponses n'est correcte.
4. Le domaine de définition de la fonction sin est  
  $[0, 2\pi]$       $[-1, 1]$       $\mathbb{R}$       $\mathbb{R} \setminus \{0\}$      Aucune des autres réponses n'est correcte.
5. Si  $f$  est une fonction dont le domaine de définition est  $[0, 1]$ , quel est le domaine de définition de la fonction de fonction  $F$  donnée explicitement par  $F(x) = f(\ln(x-1) + 1)$  ?  
  $]0, +\infty[$       $]1, +\infty[$       $[1/e, 1]$       $[1 + 1/e, 2]$      Aucune des autres réponses n'est correcte.
6. On considère l'équation différentielle suivante  $Df = f(1-f)$ . Parmi les propositions suivantes, laquelle est exacte ?  
 C'est une équation différentielle linéaire à coefficients constants homogène d'ordre 1.  
 C'est une équation différentielle linéaire à coefficients constants non homogène d'ordre 1.  
 La fonction  $1/(1 + \exp(-x))$ ,  $x \in \mathbb{R}$  vérifie cette équation.  
 La fonction logarithme népérien vérifie cette équation.  
 Aucune des autres réponses n'est correcte.
7. Soit  $A$  une matrice carrée de dimension 5. Si on multiplie les éléments de ses trois premières colonnes par 2, alors le déterminant de la nouvelle matrice est égal à  
  $2^5 \det(A)$       $6 \det(A)$       $8 \det(A)$       $10 \det(A)$      Aucune des autres réponses n'est correcte.
8. Soient  $A, B$  des matrices carrées de même dimension. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est correcte ?  
 Si  $A$  est inversible, alors 0 en est une valeur propre.  
 Si  $AB = 0$  alors  $\widetilde{A} = 0$  ou  $\widetilde{B} = 0$ .  
 On a toujours  $\widetilde{AB} = \widetilde{A}\widetilde{B}$ .  
 On a toujours  $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$ .  
 Aucune des autres réponses n'est correcte.

#### Question 2 : questions ouvertes

1. (1.1) Qu'appelle-t-on matrice diagonale ?  
(2.2) Qu'appelle-t-on matrice diagonalisable ?  
(2.3) Qu'appelle-t-on matrice stochastique ?
2. (2.1) Définir les notions de valeur propre et de vecteur propre d'une matrice carrée.  
(3.2) Définir ce que l'on entend par « polynôme caractéristique d'une matrice carrée ».  
(3.3) Démontrer que si  $\mu$  est une valeur propre de la matrice carrée  $A$ , alors  $\mu$  annule le polynôme caractéristique de  $A$ .

EXERCICES

1. On donne l'ensemble  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 2 - |x|\}$ . Représenter cet ensemble dans un repère orthonormé et calculer son aire.
2. Résoudre l'équation différentielle suivante, en spécifiant dans quel intervalle on travaille

$$D^2 f(x) - 3Df(x) = x.$$

3. On donne la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (3.1) Cette matrice est-elle inversible ? Si oui, en déterminer l'inverse.
  - (3.2) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de  $M$ .
  - (3.3) La matrice  $M$  est-elle diagonalisable ? Si oui, en déterminer une forme diagonale ainsi que la matrice qui y conduit.
4. Pendant les congés de printemps, une personne peut soit rester chez elle (R), soit voyager en Belgique (B) soit voyager en France (F). D'une année à l'autre, elle peut changer de projet de vacances de la façon suivante :
    - ayant voyagé en Belgique, elle a 2 chances sur 5 de voyager encore en Belgique l'année suivante, 2 chances sur 5 de voyager en France et une chance sur 5 de rester chez elle.
    - ayant voyagé en France, elle a une chance sur 4 de voyager en Belgique l'année suivante, une chance sur 4 de voyager en France et une chance sur 2 de rester chez elle.
    - étant restée chez elle, elle a une chance sur 2 de voyager en Belgique l'année suivante, une chance sur 4 de voyager en France et une chance sur 4 de rester chez elle.Déterminer la matrice de transition ainsi que la probabilité qu'à long terme la personne voyage en Belgique.

---

---

CORRIGÉ

---

---

THEORIE

Question 1 : QCM

1. Quand on dit que la radiation en UV a augmenté de 25%, cela signifie que la radiation a été  
 divisée par 1,25    divisée par 0,8    multipliée par 0,25    multipliée par 0,8  
 Aucune des autres réponses n'est correcte.
2. Si  $r$  est un réel strictement positif et si  $s$  est un réel strictement supérieur à 1, alors la valeur absolue du réel  $r(1-s)$  est  
  $rs+r$      $rs-r$      $-rs+r$      $-rs-r$     Aucune des autres réponses n'est correcte.
3. Si  $z$  est un complexe, alors la partie imaginaire de  $iz$  est toujours  
  $z$      $\Im(z)$      $\Re(z)$      $\Re(z) - \Im(z)$     Aucune des autres réponses n'est correcte.
4. Le domaine de définition de la fonction sin est  
  $[0, 2\pi]$      $[-1, 1]$      $\mathbb{R}$      $\mathbb{R} \setminus \{0\}$     Aucune des autres réponses n'est correcte.
5. Si  $f$  est une fonction dont le domaine de définition est  $[0, 1]$ , quel est le domaine de définition de la fonction de fonction  $F$  donnée explicitement par  $F(x) = f(\ln(x-1) + 1)$  ?  
  $]0, +\infty[$      $]1, +\infty[$      $[1/e, 1]$      $[1+1/e, 2]$     Aucune des autres réponses n'est correcte.
6. On considère l'équation différentielle suivante  $Df = f(1-f)$ . Parmi les propositions suivantes, laquelle est exacte ?  
 C'est une équation différentielle linéaire à coefficients constants homogène d'ordre 1.  
 C'est une équation différentielle linéaire à coefficients constants non homogène d'ordre 1.  
 La fonction  $1/(1 + \exp(-x))$ ,  $x \in \mathbb{R}$  vérifie cette équation.  
 La fonction logarithme népérien vérifie cette équation.  
 Aucune des autres réponses n'est correcte.
7. Soit  $A$  une matrice carrée de dimension 5. Si on multiplie les éléments de ses trois premières colonnes par 2, alors le déterminant de la nouvelle matrice est égal à  
  $2^5 \det(A)$      $6 \det(A)$      $8 \det(A)$      $10 \det(A)$     Aucune des autres réponses n'est correcte.
8. Soient  $A, B$  des matrices carrées de même dimension. Parmi les affirmations suivantes, laquelle est correcte ?  
 Si  $A$  est inversible, alors 0 en est une valeur propre.  
 Si  $AB = 0$  alors  $A = 0$  ou  $B = 0$ .  
 On a toujours  $\widetilde{AB} = \widetilde{A}\widetilde{B}$ .  
 On a toujours  $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$ .  
 Aucune des autres réponses n'est correcte.

Question 2 : questions ouvertes

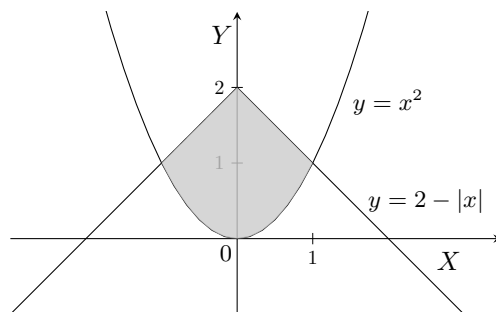
1. (1.1) **Qu'appelle-t-on matrice diagonale ?**  
(2.2) **Qu'appelle-t-on matrice diagonalisable ?**  
(2.3) **Qu'appelle-t-on matrice stochastique ?**
2. (2.1) **Définir les notions de valeur propre et de vecteur propre d'une matrice carrée.**  
(3.2) **Définir ce que l'on entend par « polynôme caractéristique d'une matrice carrée ».**  
(3.3) **Démontrer que si  $\mu$  est une valeur propre de la matrice carrée  $A$ , alors  $\mu$  annule le polynôme caractéristique de  $A$ .**

*Pour une réponse, voir le syllabus de théorie et le cours enseigné.*

EXERCICES

1. **On donne l'ensemble  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 2 - |x|\}$ . Représenter cet ensemble dans un repère orthonormé et calculer son aire.**

*Solution.* On a la représentation suivante (l'ensemble est grisé) :



Cherchons les abscisses des points d'intersection de la parabole d'équation  $y = x^2$  et des deux demi-droites d'équation  $y = 2 - |x|$ . Pour  $x \geq 0$ , on a

$$x^2 = 2 - x \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

et pour  $x < 0$  on a

$$x^2 = 2 + x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

La fonction  $x \mapsto 2 - |x| - x^2$  étant continue sur  $\mathbb{R}$ , elle l'est aussi sur l'intervalle fermé borné  $[-1, 1]$  donc est intégrable sur celui-ci. L'aire demandée est alors donnée par

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (2 - |x| - x^2) dx &= \int_{-1}^0 (2 + x - x^2) dx + \int_0^1 (2 - x - x^2) dx \\ &= \left[ 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 + \left[ 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \left( 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left( 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \\ &= 2 \left( 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \\ &= 2 \frac{12 - 3 - 2}{6} \\ &= \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

## 2. Résoudre l'équation différentielle suivante, en spécifiant dans quel intervalle on travaille

$$D^2 f(x) - 3Df(x) = x.$$

*Solution.* L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre deux non homogène et le second membre est la fonction  $x \mapsto g(x) = x$ , laquelle est continue sur  $\mathbb{R}$ . On travaille donc dans  $\mathbb{R}$ .

Cela étant, l'équation homogène est  $D^2 f - 3Df = 0$ ; le polynôme caractéristique de celle-ci est donc  $z \mapsto z^2 - 3z = z(z - 3)$ ; les zéros de ce polynôme étant les nombres 0 et 3, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$c_1 e^{0x} + c_2 e^{3x} = c_1 + c_2 e^{3x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où  $c_1, c_2$  sont des constantes complexes arbitraires.

Cherchons une solution particulière. Comme le second membre  $g(x) = x = x e^{0x}$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) est une fonction de type « exponentielle-polynôme » avec 0 zéro du polynôme caractéristique, on sait qu'une solution particulière a la forme

$$f_P(x) = (Ax + B)x = Ax^2 + Bx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

On a

$$Df_P(x) = 2Ax + B, \quad D^2 f_P(x) = 2A$$

donc, pour tout réel  $x$ ,

$$\begin{aligned} D^2 f_P(x) - 3Df_P(x) = x &\Leftrightarrow 2A - 3(2Ax + B) = x \\ &\Leftrightarrow -6Ax + 2A - 3B = x; \end{aligned}$$

il s'ensuit que  $-6A = 1$  et  $2A - 3B = 0$ , c'est-à-dire

$$A = -\frac{1}{6} \quad \text{et} \quad B = \frac{2}{3}A = -\frac{1}{9}.$$

Une solution particulière est donc la fonction

$$-\frac{x^2}{6} - \frac{x}{9}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de l'équation de départ sont donc les fonctions

$$c_1 + c_2 e^{3x} - \frac{x^2}{6} - \frac{x}{9}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où  $c_1, c_2$  sont des constantes complexes arbitraires.

### 3. On donne la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

**(3.1) Cette matrice est-elle inversible ? Si oui, en déterminer l'inverse.**

**(3.2) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de  $M$ .**

**(3.3) La matrice  $M$  est-elle diagonalisable ? Si oui, en déterminer une forme diagonale ainsi que la matrice qui y conduit.**

*Solution.* (3.1) La matrice  $M$  est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Comme  $\det(M) = 2 - 12 = -10 \neq 0$ , la matrice donnée est inversible et on a

$$M^{-1} = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} \widetilde{1} & -4 \\ -3 & \widetilde{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

(3.2) Les valeurs propres de  $M$  sont les zéros du polynôme caractéristique  $\det(M - \lambda \mathbb{1})$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Comme on a

$$\det(M - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 4 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(1 - \lambda) - 12 = \lambda^2 - 3\lambda - 10 = (\lambda - 5)(\lambda + 2),$$

les valeurs propres de  $M$  sont  $-2$  et  $5$ .

Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre  $-2$  c'est-à-dire les vecteurs non nuls

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

tels que  $(M + 2\mathbb{1})X = 0$ . On a

$$(M + 2\mathbb{1})X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 4x + 3y = 0.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre  $-2$  sont donc les vecteurs

$$X = c \begin{pmatrix} 1 \\ -4/3 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

ou encore

$$X = c \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Cherchons les vecteurs propres associés à la valeur propre  $5$  c'est-à-dire les vecteurs non nuls

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

tels que  $(M - 5\mathbb{1})X = 0$ . On a

$$(M - 5\mathbb{1})X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -x + y = 0.$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 5 sont donc les vecteurs

$$X = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

(3.3) Puisque les valeurs propres sont simples, la matrice  $M$  est diagonalisable.

Ainsi, par exemple la matrice

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \text{ est telle que } S^{-1}MS = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. **Pendant les congés de printemps, une personne peut soit rester chez elle (R), soit voyager en Belgique (B) soit voyager en France (F). D'une année à l'autre, elle peut changer de projet de vacances de la façon suivante :**

- **ayant voyagé en Belgique, elle a 2 chances sur 5 de voyager encore en Belgique l'année suivante, 2 chances sur 5 de voyager en France et une chance sur 5 de rester chez elle.**

- **ayant voyagé en France, elle a une chance sur 4 de voyager en Belgique l'année suivante, une chance sur 4 de voyager en France et une chance sur 2 de rester chez elle.**

- **étant restée chez elle, elle a une chance sur 2 de voyager en Belgique l'année suivante, une chance sur 4 de voyager en France et une chance sur 4 de rester chez elle.**

**Déterminer la matrice de transition ainsi que la probabilité qu'à long terme la personne voyage en Belgique.**

*Solution.* Soient  $B_0, F_0$  et  $R_0$  les situations initiales respectives (voyager en Belgique, voyager en France et rester chez soi) et  $B_1, F_1$  et  $R_1$  les situations l'année suivante. Vu les observations, on a donc

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ F_1 \\ R_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/4 & 1/2 \\ 2/5 & 1/4 & 1/4 \\ 1/5 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ F_0 \\ R_0 \end{pmatrix}$$

et la matrice de transition  $T$  est donc

$$T = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/4 & 1/2 \\ 2/5 & 1/4 & 1/4 \\ 1/5 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Puisque la matrice de transition est régulière, la situation à long terme est donnée par le vecteur propre de probabilité de valeur propre 1.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls  $X$  tels que

$$(T - \mathbb{1})X = 0.$$

On a successivement

$$\begin{aligned}(T - \mathbb{1})X = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3/5 & 1/4 & 1/2 \\ 2/5 & -3/4 & 1/4 \\ 1/5 & 1/2 & -3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -12x + 5y + 10z = 0 \\ 8x - 15y + 5z = 0 \\ 4x + 10y - 15z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 15y + 5z = 0 \\ -4x - 10y + 15z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 15y + 5z = 0 \\ -8x - 20y + 30z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -35y + 35z = 0 \\ 8x - 15y + 5z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x = 5z/4. \end{cases}\end{aligned}$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont donc des vecteurs du type

$$c \begin{pmatrix} 5/4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Comme  $c(5/4 + 1 + 1) = 1 \Leftrightarrow 13c/4 = 1 \Leftrightarrow c = 4/13$ , le vecteur de probabilité de valeur propre 1 est le vecteur

$$4/13 \begin{pmatrix} 5/4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/13 \\ 4/13 \\ 4/13 \end{pmatrix}.$$

La probabilité qu'une personne voyage en Belgique à long terme est donc de 5/13.