MATH0009 *Biologie et Géographie*

Année académique 2025-2026

Exercices de mathématiques
Révisions en vue de l'interrogation du 17 avril
et de l'examen de juin 2026

Version 20 mars 2026

Répétition de révisions

A préparer AVANT de venir à la répétition

1. Si elles sont définies, simplifier au maximum les expressions suivantes :
   (a) $\sin\left(\ln(e^{-\pi/6})\right) + \cos\left(\tan(-\pi/3)\right)$
   (b) $\arccos\left(1 - \sin(5\pi/6)\right) + \arcsin\left(\sin(7\pi/6)\right)$
   (c) $\exp\Big(\sin(\pi/6)\,\ln(\cos(5\pi/3))\Big)$

2. Si elles existent, déterminer les limites suivantes

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\ln(x-2)}{x-3}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \arctan\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{|1-x|}{\sqrt{1+x^2}}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{\exp(2x)-1}{x}$

   (e) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} (\ln(2x+5) - \ln(2x))$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (\ln(2x+5) - \ln(2x))$

3. Où la fonction $x \mapsto \arcsin(\sqrt{1-4x^2})$ est-elle définie ? dérivable ? En déterminer la forme explicite de la dérivée première.

4. (a) Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre $n = 0$, 1, 2 et 3 en $x_0 = 0$ de la fonction f définie par
$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ x \in \mathbb{R}.$$
   (b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.
   (c) Dans un même repère orthonormé, représenter ces approximations ; représenter aussi f au voisinage de 0 en tenant compte du point précédent.

5. On donne l'ensemble (c'est une surface du plan)
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq -|x|\}.$$
   Représenter cet ensemble dans un repère orthonormé et calculer son aire.

6. Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier la réponse au maximum.

   (a) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{\ln(-3x)}{x}dx$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^{3x}dx$

   (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{2-x}dx$ (d) $\displaystyle\int_{-4}^{4} \sqrt{x^2}dx$

   (e) $\displaystyle\int_{4}^{5} \frac{2}{x(x^2-6x+9)}dx$

7. Déterminer les parties réelle et imaginaire, le conjugué et le module du complexe $z = i^{15}/(i-1)$. Le représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé (« X = axe réel » et « Y = axe imaginaire »).

8. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:
   (a) $x^2 + 3 = 2ix$
   (b) $8 - x^3 = 0$

9. Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes (f est la fonction inconnue)

   (a) $D^2f(x) + f(x) = \exp(ix)$ (b) $9D^2f(x) + 6Df(x) + f(x) = 1 + x^2$

10. Soient les matrices A et B données par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i^3 \\ 0 & i & 0 \\ 1/i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B^* = \begin{pmatrix} 2i & i & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si possible, effectuer les opérations suivantes et simplifier la réponse au maximum :

(a) $A + \widetilde{B}$ (b) AB (c) $(AB)^{-1}$

11. La matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ? Pourquoi ? Si oui, en déterminer une forme diagonale Δ ainsi qu'une matrice inversible S qui y conduit.

12. Pour inciter les jeunes à faire du sport, une association oblige ses affiliés à pratiquer, chaque semaine, un sport sur les trois qu'elle propose (jogging, natation, basket). D'une semaine à l'autre, les étudiants peuvent changer de choix.
- Ayant choisi le jogging, un étudiant a une chance sur deux d'aller à la piscine et une chance sur deux de pratiquer le basket la semaine suivante.
- S'il a nagé une semaine, la semaine suivante, il a une chance sur trois de poursuivre la même activité, une chance sur trois de faire du jogging et une chance sur trois de pratiquer le basket.
- Enfin, s'il a joué au basket, il a une chance sur quatre de nager et trois chances sur quatre de faire du jogging.
(a) Déterminer la matrice de transition.
(b) Sachant que cette matrice est régulière, calculer la probabilité qu'à long terme un étudiant fasse du jogging.